RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences expérimentales**	
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**	

N° d'inscription

Le sujet comporte 5 pages. La page 5/5 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4 points)

1. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 3(\sqrt{3}+i)z + 4(1+i\sqrt{3}) = 0$.

   a) Vérifier que $(\sqrt{3}+i)^2 = 2 + 2i\sqrt{3}$.

   b) Résoudre l'équation (E).

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B et D d'affixes respectives $z_A = \sqrt{3}+i$, $z_B = 2z_A$ et $z_D = (1+i)z_A$.

   Dans la figure 1 de l'annexe ci-jointe, on a placé les points A et B.

   a) Vérifier que $\dfrac{z_D - z_A}{z_B - z_A} = i$.

   b) Montrer que BAD est un triangle rectangle et isocèle.

   c) Ecrire z_A sous forme exponentielle.

   d) Donner alors l'écriture de z_D sous forme exponentielle.

   e) Construire le point D.

3. a) Montrer que la fonction $x \mapsto \tan x$ réalise une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $[0,+\infty[$.

   b) En déduire qu'il existe un unique réel $\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$.

   c) Soit E le point d'affixe $z_E = 2+i$ et H son projeté orthogonal sur l'axe $(O,\vec{u})$.

   Calculer $\dfrac{HE}{OH}$.

   d) En déduire que $z_E = \sqrt{5}\,e^{i\theta}$.

4. Soit C le point d'affixe z_C tel que ABCD est un carré.

   a) Montrer que $z_C = (2+i)z_A$.

   b) Donner à l'aide de θ l'écriture exponentielle de z_C.

Exercice 2 (4 points)

Dans une région, 25% des chevaux sont touchés par une maladie contagieuse.

Un test aide à la détection de cette maladie.

- Si le cheval est malade, le test est positif dans 96% des cas.
- Si le cheval n'est pas malade, le test est négatif dans 92% des cas.

1. On choisit au hasard un cheval de cette région.

   On considère les évènements suivants :

   - M : « Le cheval est malade » et $\overline{M}$: « Le cheval n'est pas malade ».
   - T : « Le test est positif » et $\overline{T}$: « Le test est négatif ».

   a) Donner les probabilités p(M), p(T/M) et $p(\overline{T}/\overline{M})$.

   b) Montrer que p(T) = 0,3.

   c) Calculer la probabilité que le cheval choisi soit malade sachant que son test est positif.

2. Un fermier de cette région possède un troupeau de 5 chevaux.

   Pour dépister la maladie dans ce troupeau, il procède comme suit :

   Le fermier choisit au hasard un cheval et effectue le test.

   ✓ Si le cheval est testé positif, le fermier s'arrête de tester et vaccine les 5 chevaux.

   ✓ Si le cheval est testé négatif, le fermier teste un deuxième cheval. Si le deuxième cheval est testé positif, le fermier s'arrête de tester et vaccine les 5 chevaux. Si le deuxième cheval est testé négatif, le fermier teste un troisième cheval et continue à procéder de la même manière jusqu'à ce qu'il obtienne un cheval testé positif, s'il existe.

   - Si les 5 chevaux sont testés négatifs alors ils ne seront pas vaccinés.

Pour un seul cheval, le test de dépistage coûte 10 dinars et le vaccin coûte 40 dinars.

Soit X l'aléa numérique égal à la dépense du fermier en dinars.

a) Calculer p(X = 50).

b) Montrer que p(X = 220) = 0,21.

c) Déterminer la loi de probabilité de X.

Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = -\frac{1}{2}e^{2x} + e^{x} + 2x$ et on désigne par (ζ_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$. Interpréter graphiquement.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et montrer que la droite $\Delta : y = 2x$ est une asymptote à (ζ_f) au voisinage de $-\infty$.

   c) Etudier la position relative de (ζ_f) et Δ.

2. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (e^{x} + 1)(2 - e^{x})$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.

   c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β telles que $-0,3 < \alpha < -0,2$ et $1,2 < \beta < 1,3$.

   d) Montrer que pour tout $x \in [\alpha, 0]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}$ et $0 \leq \frac{f(x)}{1 - f(x)} \leq 1$.

3. Dans la figure 2 de l'annexe ci-jointe, on a placé dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les réels α et β.

   a) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (ζ_f).

   b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (ζ_f) et les droites d'équations respectives y = 0, x = 0 et x = ln2.

B) 1. On considère la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \int_{\alpha}^{0} (f(t))^n \, dt$, $n \in IN^*$.

   a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $0 \leq u_n \leq -\alpha \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

2. Soit (S_n) la suite définie sur IN^* par $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$, $n \in IN^*$.

   a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $S_n = \int_{\alpha}^{0} \frac{f(t)}{1 - f(t)} (1 - (f(t))^n) \, dt$.

   b) Montrer que la suite (S_n) est croissante et majorée.

   c) Montrer alors que la suite (S_n) converge vers un réel ℓ et que $0 \leq \ell < 0,3$.

Exercice 4 (5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(-2,-1,0)$, $B(1,3,1)$, $C(0,1,1)$ et $I(1,0,-2)$.

1. a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

   b) En déduire que les points A, B et C déterminent un plan P.

   c) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $2x - y - 2z + 3 = 0$.

2. a) Vérifier que le point I n'appartient pas au plan P.

   b) Calculer le volume V du tétraèdre ABCI.

3. a) Déterminer une équation de la sphère (S) de centre I et tangente à P.

   b) Justifier que le point $H(-1, 1, 0)$ est le point de contact de (S) et P.

   c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IH).

4. Soit ζ le cercle du plan P de centre H et tangent à la droite (AC).

   a) Montrer que le cercle ζ est de rayon $r = 1$.

   b) Montrer qu'il existe un point M de la droite (IH), distinct de I, tel que la distance d(M,P) de M à P est égale à 3.

   c) En déduire que les deux sphères de centres respectifs M et I et de rayon $R = \sqrt{10}$ coupent P suivant le cercle ζ.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences expérimentales
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

figure 1

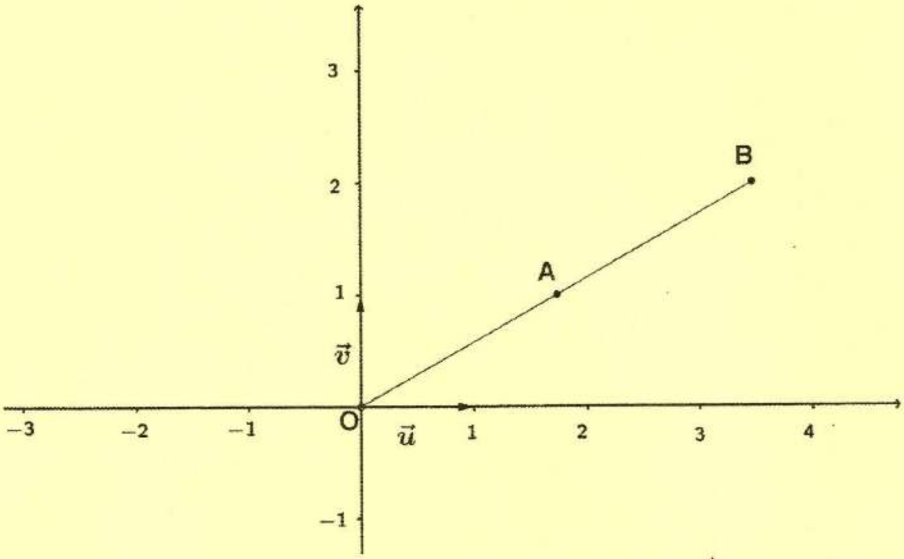

figure 2