Exercice 1

Répondre par Vrai ou Faux

Soient les polynômes $P(x) = x^3 - 3x + 2$ et $Q(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^2$

a) 1 est une racine commune aux deux polynômes P et Q.

b) Le degrés du polynôme $P(x) + Q(x)$ est égale à 8.

c) Le degrés du polynôme $P(x) \times Q(x)$ est égale à 15.

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x - 3$.

1) Vérifier que -1 est une racine de P.

2) Déterminer trois réels a, b, et c tel que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.

3) Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3

Soient les polynômes $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ et $Q(x) = x^2 + x - 6$

1) Résoudre dans IR l'équation $Q(x) = 0$

2) **a)** Montrer que 2 est une racine de $\mathrm{P(x)} = 0$

b) Déterminer trois réels a ; b et c tel que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$

c) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 0$

3) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = Q(x)$

4) Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Simplifier l'expression de $f(x)$

c) Résoudre dans IR l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 4

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$.

1) **a)** Calculer $P(1)$

b) Déterminer trois réels a, b, et c tel que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$

2) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

3) **a)** Dresser le tableau de signe de $P(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$.

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\frac{1}{P(x)} \geq 0$

Exercice 5

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$.

1) **a)** Calculer $P(-1)$ et $P(2)$

b) Déterminer le polynôme G tel que $P(x) = (x+1)(x-2)G(x)$.

2) **a)** Factoriser $P(x)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$; puis l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 6

Pour chaque proposition, trouver la seule bonne réponse :

1) Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + |x| - 1$ $x \in IR$ est une fonction :

a) polynôme b) rationnelle c) ni polynôme ni rationnelle

2) Soit P , Q et R trois polynôme tel que $P(x) = Q(x) \times R(x)$ si $d°(P) = 5$ et $d°(Q) = 2$ alors $d°(R) =$

a) 10 b) 7 c) 3

3) Le polynôme $3x^3 - 6x^2 + x + 2$ est factorisable par :

a) $x - 1$ b) $x + 1$ c) $x - 2$

4) Soit $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2+8}$, le domaine de définition de f est :

a) $IR\backslash\{-2\,,2\}$ b) $IR\backslash\{-2\}$ c) IR

Exercice 7

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

1) Vérifier que 2 est une racine de P, puis factoriser P.

2) Soit $f(x) = \frac{P(x)}{x^2-x-2}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f.

b) Montrer que pour tout réel x de D ; $f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 8

Soit les polynômes $P(x) = -2x^2 - 3x + 5$ et $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$

1) **a)** Déterminer les racines du polynôme P.

b) Vérifier que 1 et -2 sont des racines de Q.

c) En déduire la factorisation de Q en produit de binômes de 1[er] degré.

2) Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Simplifier $f(x)$.

3) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Exercice 9

Soit le polynôme $P(x) = -2x^4 + 2x^3 + 26x^2 - 2x - 24$

1) **a)** Montrer que 1 et -3 sont deux racines de P.

b) Déterminer un polynôme Q tel que $P(x) = (x-1)(x+3)Q(x)$.

2) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{P(x)}{-2x^2-x+15}$

a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Simplifier f.

3) Résoudre alors $f(x) \geq 0$

Exercice 10

1) Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

a) Vérifier que -2 est une racine de f

b) Déduire que $f(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$ où a, b, et c sont des réels à déterminer

c) Résoudre dans IR $f(x) \geq 0$

d) Déduire le domaine de définition de la fonction $R(x) = \sqrt{f(x)}$

2) **a)** Développer et réduire le polynôme $(x+a)(x^2+1)$

b) Factoriser alors $g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

3) Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h

b) Montrer que $\forall x IR \backslash \{-2\}$ on a $h(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+1}$

c) Résoudre dans IR $h(x) \leq 1$

Exercice 11

Soit le polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

1) **a)** Calculer $P(2)$

b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = (x-2)Q(x)$

c) Vérifier que $-\frac{1}{2}$ et 3 sont les racines de Q

2) Résoudre dans IR l'équation $P(x) = 12 - 6x$

3) Soit $f(x) = \frac{P(x)}{-x^2+7x-10}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Vérifier que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{5-x}$

4) **a)** Déterminer le signe de $f(x)$

b) Résoudre dans IR l'inéquation $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{-x}$

Exercice 12

On considère les polynômes A et P définis par :

$A(x) = 4x^4 - 13x^2 + 9$ et $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

1) **a)** Factoriser le trinôme $4x^2 - 13x + 9$

b) En déduire la factorisation de $A(x)$ en produits de quatre facteurs

2) **a)** Vérifier que (-1) est une racine de P

b) En déduire que $P(x) = (x + 1) \times R(x)$ où R est un polynôme que l'on déterminera

3) Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{A(x)}{P(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f puis simplifier $f(x)$

b) Résoudre dans $f(x) \geq 0$ puis $\sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x-1}$

Exercice 13

1) Déterminer le signe du polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$.

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

a) Montrer f^2 est un polynôme de degrés 2.

b) En déduire que si f est un polynôme, alors son degrés est égale à 1.

3) **a)** Montrer qu'ils n'existent pas de réels a et b tel que, pour tout réel x :

$\sqrt{x^2 + x + 1} = ax + b$

b) En déduire que f n'est pas un polynôme.

Exercice 14

On considère les polynômes T et P définis par :

$T(x) = -x^2 + 6x - 8$ et $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$

1) **a)** Résoudre dans IR l'équation $T(x) = 0$

b) Déduire une factorisation de $T(x)$

c) Vérifier que T et P ont une racine commune

d) Factoriser alors $P(x)$

2) **a)** Résoudre dans IR l'équation $2x^2 - 8 = 3x - \frac{12}{x}$

b) Résoudre dans IR les inéquations $T(x) \geq 0$ et $\sqrt{T(x)} < x - 2$

3) Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{4x-8}{P(x)+T(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f

b) Pour tout $x \in D_f$, simplifier $f(x)$ et vérifier que $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$

c) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, calculer $S_n = f(3) + f(4) + f(5) \dots + f(n)$ rn fonction de n

Exercice 15

Soit le polynôme $P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$

1) **a)** Montrer que pour tout réel x on a : $P(x) - P(x-1) = x$.

b) En déduire de ce qui précède $A = 1 + 2 + 3 + 4$ et $B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 16

Soit le polynôme $P(x) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$

1) **a)** Montrer que pour tout réel x on a : $P(x) - P(x-1) = x^2$.

b) En déduire de ce qui précède $A = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ et $B = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2$.

2) Montrer que pour tout réel n non nul , on a : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Exercice 17

Soit le polynôme $P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

1) Calculer $P(-1)$; $P(1)$ et $P(2)$.

2) Montrer que pour tout réel x ;on a $P(x+1) = \frac{x^2(x^2+1)^2}{4}$

3) En déduire que pour tout réel x ;on a $P(x+1) - P(x) = x^3$

4) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$; on a : $1^3 + 2^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n^2+1)^2}{4}$