Lycée 2 Mars 34 Ksar Hellal | **DEVOIR DE SYNTHESE N° 1** | **4ème M**

Mr : Boudhaouia | **Durée 3h** | **06/12/2011**

Exercice 1 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

1) a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[1\,,+\infty[$.

c) Montrer que la fonction f^{-1} réciproque de f est continue sur $[1\,,+\infty[$ et préciser son sens de variation sur $[1\,,+\infty[$.

2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur l'intervalle $]1\,,+\infty[$.

b) Montrer que f^{-1} n'est pas dérivable en 1.

c) Calculer $f^{-1}(x)$ en fonction de x pour tout $x \in [1\,,+\infty[$.

3) Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite U est croissante.

b) Montrer que la suite U n'est pas majorée.

c) Déterminer alors la limite de la suite réelle U.

Exercice 2 (6 points)

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{2U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit la suite réelle V définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{2U_n-2}{2U_n--1}$

a) Montrer que la suite V est géométrique de raison : $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver alors la limite de la suite U.

3) a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 = \frac{1}{2^n}$ $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

c) Retrouver alors la limite de la suite U.

<u>Exercice 3</u> (8 points)

1) Soit $f(z) = z^3 - (6+i)z^2 + (13+7i)z - 10(1+i)$ où z est un nombre complexe.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (4+i)z + 5(1+i) = 0$

b) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle que l'on déterminera.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 0$.

2) a) Déterminer les racines carrées du nombre complexe -16 .

b) En déduire les solutions de l'équation $z^4 = -16$.

3) a) Déterminer les racines cubiques du nombre complexe $8i$.

b) Ecrire chacune des racines cubiques obtenues sous forme algébrique.

c) Soit $z \in \backslash\{1\}$ et $z \in \backslash\{i\}$.

Montrer que $Z = \frac{iz+\sqrt{3}}{z-1} \Leftrightarrow z = \frac{Z+\sqrt{3}}{Z-i}$

d) En déduire les solutions de l'équation complexe : $\left(iz+\sqrt{3}\right)^3 = 8i(z-1)^3$