Lycée secondaire Bach Hamba	Classe : 4ème sciences experimentales₁	
Prof: Mme Bayoudh	Date :07/11/2012	Durée : 2 heures

Devoir de contrôle n °1 en mathématiques

Q.C.M : (3 points)

Pour chacune des questions suivantes ,une seule réponse est correcte .(Aucune justification n'est demandée)

1) Soit la fonction : $f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

a/ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ n'existe pas

b/ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=$ ☐ 1 ☐ 0 ☐ $+\infty$

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n=n.\cos(\dfrac{\pi}{n})$

☐ (u_n) est convergente ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$ ☐ (u_n) n'a pas de limite en $+\infty$

3) Dans le plan complexe muni d'un rpère orthonormé direct ,

on donne les points A,B et C d'affixes respectives $Z_A=2-i$, $Z_B=2+i$ et $Z_C=-2+i$,

alors l'ensemble des points M du plan d'affixe Z vérifiant $\left|\overline{Z}-2+i\right|=3$ est un cercle de rayon 3 et de centre

☐ A ☐ B ☐ C

Exercice n°1 : (6,5 points)

Soit la fonction f la fonction définie sur $]-\infty,4[$ par $f(x)=\dfrac{3}{4-x}$

Soient les suites (U_n) et (V_n) définie sur IN par : $\begin{cases} u_0=-2 \\ u_{n+1}=f(u_n) \quad ,n\geq 0\end{cases}$ et $\begin{cases} v_0=2 \\ v_{n+1}=f(v_n) \quad ,n\geq 0\end{cases}$

Dans l'annexe , on a tracé la courbe de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ainsi que la droite $\Delta : y = x$

On a placé les termes v_0 , v_1 et v_2 sur l'axe des abscisses.

1) a/ Déduire du graphique les variations de f sur $]-\infty,4[$

b/ Placer sur l'axe des abscisses les termes u_0 , u_1 et u_2 en utilisant la courbe de f et la droite Δ.

c/ Que peut-on conjecturer sur la convergence de (U_n) et (V_n).

2) a/ Montrer que la suite (U_n) est croissante et que $u_n\leq 1$, pour $n\in IN$.

b/ Montrer que la suite (V_n) est décroissante et que $v_n\geq 1$, pour $n\in IN$.

c/ En déduire que $u_n\leq v_n$, pour $n\in IN$.

3) a/ Montrer que $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{3(v_n-u_n)}{(4-v_n)(4-u_n)}$

b/ En justifiant que $(4-v_n)(4-u_n)\geq 6$, Montrer que $v_{n+1}-u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$

c/ Montrer par récurrence que $v_n-u_n\leq 4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

d/ Calculer alors la limite de (v_n-u_n) lorsque n tend vers $(+\infty)$.

Que peut-on dire des suites (U_n) et (V_n) ?

e/ Déduire que (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite ℓ que l'on déterminera.

Exercice n°2 : (5,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs $Z_A=\sqrt{3}+i$ et $Z_B=-1+i\sqrt{3}$.

1) a) Ecrire sous forme exponentielle Z_A et Z_B .

b) Placer les points A et B dans le repère.

c) Ecrire $\frac{Z_B}{Z_A}$ sous forme exponentielle.

d) Déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

e) Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un carré.

2) Soit un point M d'affixe $Z_M = 1+e^{2i\theta}$ où $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que $Z_M = 2\cos\theta\ e^{i\theta}$ puis vérifier que c'est son écriture sous forme exponentielle.

b) Déterminer la valeur de θ pour que M appartient au cercle de centrer O et de rayon 1.

c) Déterminer la valeur de θ pour que les points O, A et M soient alignés.

Exercice n°3 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x^2+1} & si\ \ x \succ 0 \\ x^3+2x+1 & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $x \in [0,+\infty[$: $0 \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x^2+1}$

(Indication : Comparer $\sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ pour a et b deux réels positifs)

b) Déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) Etudier la continuité de f en 0.

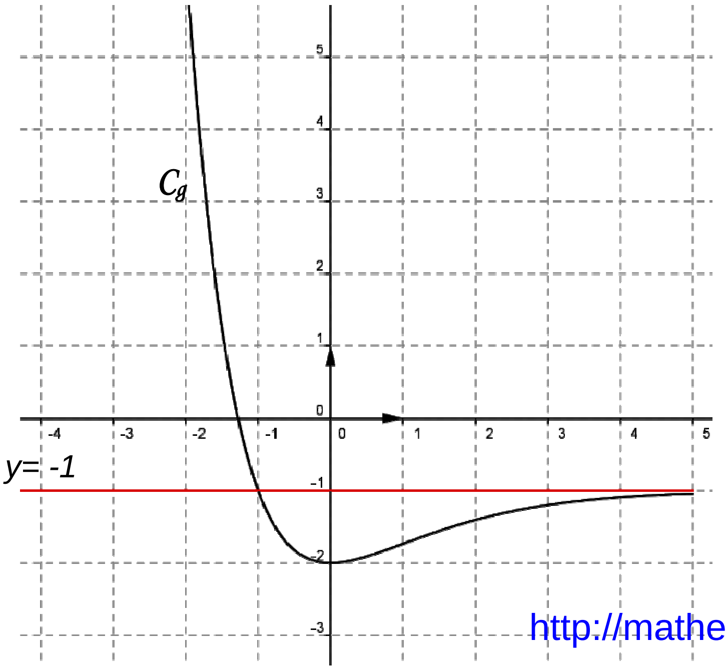
3) a) Etudier les variations de f sur $]-\infty,0]$.

b) Monter que l'équation f(x) =0 admet dans $]-\infty,0]$ une unique solution α puis vérifier que $-0,5 \leq \alpha \leq -0,4$.

4) La courbe C_g ci dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur IR.

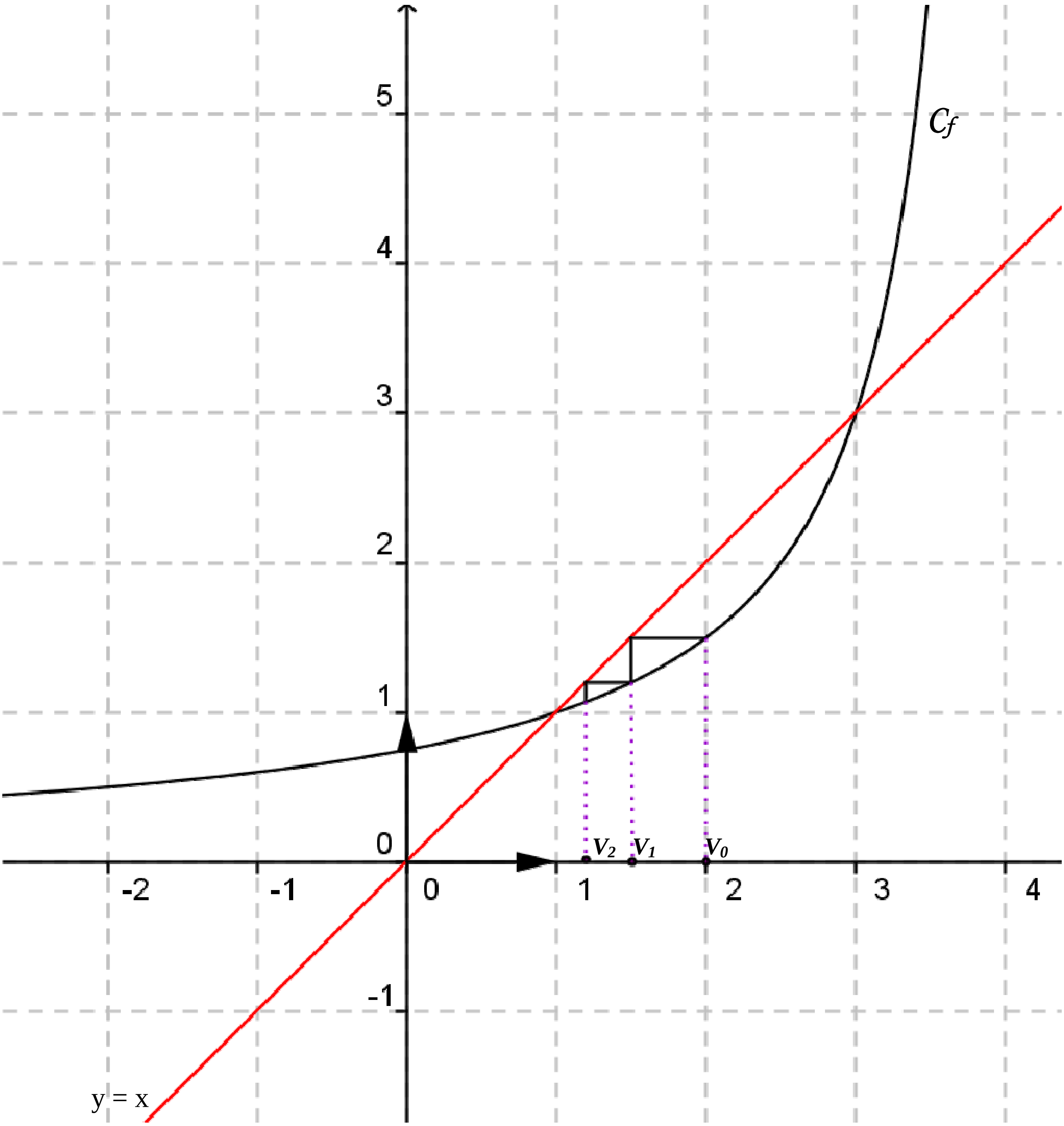
C_g admet la droite D : y =-1 comme asymptote horizontale au voisinage de $(+\infty)$

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} gof(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} fog(x)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} fog(x)$



Annexe

Nom & Prénom : . . . .



Bon travail et bonne chance