

Vecteurs de l'espace 3ème Sc Techniques

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé  $(O \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

**Exercice 1**

On considère les points  $A(-1, -1, 3)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(1, 1, -3)$  et  $D(1, 2, -1)$

- 1) a) Déterminer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$   
b) Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- 2) a) Déterminer les coordonnées du point  $E$  milieu du segment  $[AB]$   
b) Déterminer les coordonnées du point  $G$  centre de gravité du triangle  $ABC$
- 3) a) Montrer que les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires  
b) Déterminer les coordonnées des points  $J$  et  $K$  tel que

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CK} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{AC}$$

- 4) Soit le point  $M(x, y, z)$ , montrer que si  $A, B, C$  et  $M$  sont coplanaires alors  $3x - 6y - z = 0$

**Exercice 2**

On donne les points  $A(1, 1, -1)$ ,  $B(1, -1, 2)$ ,  $C(3, 1, -1)$  et  $D(2, 1, 1)$

- 1) a) Déterminer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$   
b) Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- 2) a) Calculer  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$   
b) Que peut-on conclure ?
- 3) Déterminer les coordonnées du point  $I$  tel que  $2\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

**Exercice 3**

Dans chacun des cas dire si les vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires ou non

- 1)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 2)  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- 3)  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

**Exercice 4**

on considère les points  $A(2, 1, 0)$ ,  $B(0, 1, 1)$ ,  $C(0, 3, 2)$  et le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

- 1) Démontrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- 2) Montrer que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\vec{u}$  ne sont pas coplanaires.
- 3) Déterminer les coordonnées du point  $O$  dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{u})$

### Exercice 5

On considère les points  $A(0, 1, -5)$ ,  $B(-1, -2, -1)$ ,  $C(1, 0, -5)$  et  $D(2, 3, -9)$

- 1) a) Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés  
b) Déterminer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{AD}$   
c) Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un parallélogramme
- 2) Soit  $M(x, y, z)$  montrer que  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires ssi  $x + y + z + 4 = 0$ .

### Exercice 6

On considère les points  $A(1, 2, 3)$ ,  $B(-1, 3, 0)$  et  $C(-2, 2, 5)$

- 1) a) Déterminer les coordonnées des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$   
b) Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- 2) Déterminer les coordonnées du point  $D$  pour que  $ABDC$  soit un parallélogramme
- 3) a) Calculer les coordonnées du point  $I$  milieu du segment  $[BC]$   
b) Déterminer les coordonnées du centre de gravité  $G$  du triangle  $ABC$   
c) Déterminer les coordonnées du centre de gravité  $G'$  du triangle  $CDB$   
d) Vérifier que  $I$  est le milieu de  $[GG']$
- 4) Dans la base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  on considère le vecteur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 
  - a) Calculer  $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{u})$
  - b) Justifier alors que le triplet  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{u})$  est une base de  $W$
  - c) Déterminer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  et  $\overrightarrow{BC}$  dans la base  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{u})$
  - d) Déterminer les coordonnées du point  $D$  dans le repère  $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \vec{u})$

### Exercice 7

On considère les points  $A(0, -1, 0)$ ;  $B(1, 1, 0)$ ;  $C(0, 0, 1)$  et  $D(-3, 3, -2)$

- 1) a) Déterminer les composantes des vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{BD}$   
b) Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés
- 2) a) Montrer que le triangle  $ABD$  est rectangle  
b) Calculer l'aire du triangle  $ABD$
- 3) a) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires  
b) Soit  $M(x, y, z)$  montrer que  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires ssi  $2x - y + z - 1 = 0$

### Exercice 8

On considère les points  $A(1, -2, -1)$ ;  $B(3, -3, -2)$ ;  $C(0, -3, 1)$  et  $D(1, 1, 1)$

- 1) a) Déterminer les coordonnées du point  $I$  milieu du segment  $[BC]$   
b) Soit  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ , déterminer les coordonnées du point  $G$
- 2) a) Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  ne sont pas coplanaires  
b) Soit  $M(x, y, z)$  montrer que  $\overrightarrow{AM}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont coplanaires ssi  $x + y + z + 2 = 0$