Variable aléatoire 4ème Sc Techniques

Exercice 1

Une urne contient 5 jetons indiscernables au toucher dont 3 blancs et 2 verts

1) Une épreuve consiste à effectuer 2 tirages de la manière suivante :

∗ Si on obtient un jeton blanc on le remet dans l'urne avant de procéder au deuxième tirage

∗ Si on obtient un jeton vert on ne le remet pas dans l'urne et on le remplace par un jeton blanc avant de procéder au deuxième tirage

a) Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus. Déterminer la loi de probabilité de X

b) Soit l'événement S :<< Avoir 2 jetons de même couleur >>. Déterminer la probabilité de S

2) On répète l'épreuve précédente n fois de suite en remettant à chaque fois les 2 jetons tirés dans l'urne $n \in \mathbb{N}^*$

a) Déterminer la probabilité de l'événement : A_n « avoir 0 fois l'évènement S »

b) Déterminer la probabilité de l'événement : B_n « avoir au moins une fois l'évènement S »

3) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que : $p(B_n) > \frac{1}{2}$

Exercice 2

Une boite B_1 contient cinq boules numérotées : -2, -1, 1, 1, 2

Une boite B_2 contient trois boules numérotées : 0, 0, 1

I) On tire au hasard une boule de chaque boite et on désigne par X l'aléa numérique égale à la somme des nombre inscrits sur les deux boules

1) Déterminer la loi de probabilité de X

2) Calculer $E(X)$ et $V(x)$

II) On considère maintenant l'épreuve qui consiste à tirer simultanément trois boules de la boite B_1

Soit les événements suivants :

A : « aucune boule tirée ne porte le numéro 1 »

B : « parmi les trois boules tirées deux portent le numéro 1 »

S : « la somme des nombres inscrits sur les deux boules qui restent dans la boite B_1 est nulle »

1) Calculer $p(A)$ et $p(B)$

2) Montrer que $p(S) = \frac{3}{10}$

3) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans la boite B_1

Calculer la probabilité des événements suivants :

E : « S est réalisée exactement trois fois »

F : « S est réalisée au moins une fois »

G : « S est réalisée pour la première fois au troisième tirage »

Exercice 3

Une classe est constituée de 18 filles et 12 garçons. Le tiers des garçons et la moitié des filles aiment les mathématiques. On choisit au hasard un élève de la classe.

On note F l'évènement « l'élève est une fille » et M l'évènement « l'élève aime les mathématiques ».

1) Calculer $p(F)$

2) L'élève choisi est un garçon. Qu'elle est la probabilité qu'il aime les mathématiques ?

3) Calculer $p(M)$

4) On constate que l'élève choisi aime les mathématiques. Qu'elle est la probabilité qu'il s'agisse d'une fille

5) On inscrit le nom des élèves sur des cartons identiques que l'on met dans une urne. On tire de l'urne au hasard un carton. On répète cette épreuve dix fois de suite tout en remettant le carton tiré dans l'urne. On associe à cette épreuve la variable aléatoire X qui prend pour valeurs le nombre d'élèves qui aiment les mathématiques.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer la probabilité d'avoir au moins un élève qui aime les mathématiques.

Exercice 4

Un sondage effectué auprès d'une population de 1000 personnes à propos du mode de connexion de l'internet a donné les résultats suivants :

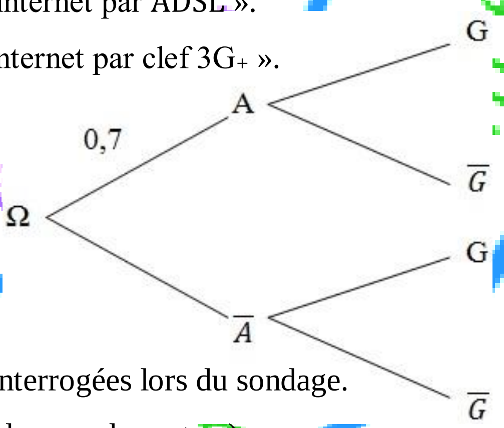
∗ 700 personnes interrogées connectent à l'internet par ADSL.

∗ 630 personnes interrogées connectent à l'internet par clef 3G₊.

∗ 420 personnes interrogées utilisent à la fois l'ADSL et une clef 3G₊ pour se connecter à l'internet.

On note l'évènement A « la personne interrogée connecte à l'internet par ADSL ».

On note l'évènement G «la personne interrogée connecte à l'internet par clef 3G₊ ».



1) a) Justifier que $p(G/A) = 0,6$.

b) En déduire la valeur de $p(G/\overline{A})$.

2) Justifier que $p(G \cap \overline{A}) = 0,21$.

3) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre :

4.) On choisit au hasard 5 personnes parmi celles qui ont été interrogées lors du sondage.

(On suppose que les choix des 5 personnes sont indépendants les uns des autres).

Quelle est la probabilité qu'il y ait aux plus 2 personnes qui se connectent à l'internet par clef 3G₊ ?

Exercice 5

Un magasin vend des salons de jardin. Une enquête statistique a montré que 10 % des personnes qui entrent dans le magasin achètent une table. Parmi les personnes qui achètent une table, 80% achètent un lot de chaises. Parmi les personnes qui n'achètent pas de table, 10 % achètent un lot de chaises.

Une personne entre dans le magasin.

On note T l'évènement : « La personne achète une table ».

On note C l'évènement : « La personne achète un lot de chaises ».

1) Traduire à l'aide d'un arbre pondéré la situation décrite ci-dessus.

2) a) Montrer que la probabilité que la personne achète un lot de chaises est égale à $0{,}17$.

b) Quelle est la probabilité que la personne n'achète pas de table sachant qu'elle a achète un lot de chaises.

3) A la fin de la journée, le directeur du magasin constate qu'il a réalisé en moyenne un bénéfice de $11{,}800$ dinars par personne entrant dans le magasin.

Le directeur du magasin a fait un bénéfice de 50 dinars par table vendue et x dinars par lot de chaises vendues.

On se propose de calculer x.

Soit Y la variable aléatoire qui prend pour valeurs le bénéfice que peut réaliser le directeur.

a) Déterminer les valeurs possibles de Y.

b) Donner la loi de probabilité de Y

c) Montrer que $E(Y) = 5 + 0{,}17\,x$

d) Conclure.

Exercice 6

Un site archéologique propose deux types de visite (guidée ou non guidée). Chaque visiteur peut utiliser son appareil photographique en payant un supplément. Une étude statistique a montré que :

* 70% des visiteurs choisissent la visite guidée.

* 18% des visiteurs choisissent la visite non guidée et payent le supplément.

* Parmi les visiteurs ayant choisi la visite guidée, 80% payent le supplément.

On choisit un visiteur au hasard et on note les événements suivants :

G : « Le visiteur choisit la visite guidée. »

S : « Le visiteur paye le supplément. »

1) a) Calculer $p(G)$, $p\left(S \cap \overline{G}\right)$ et $p(S\,/\,G)$.

b) Montrer que $p(S) = 0{,}74$.

2) La visite non guidée coûte 15 dinars, la visite guidée coûte 25 dinars et le supplément revient à 10 dinars.

Soit X l'aléa numérique égal à la dépense du visiteur en dinars.

a) Donner la loi de X.

b) Calculer l'espérance mathématique de X.

3) Un groupe de 20 visiteurs arrive sur le site. On suppose que les choix des visiteurs pour le type de visite et le payement du supplément sont indépendants.

Calculer la probabilité pour qu'au moins deux visiteurs dépensent 25 dinars.

Exercice 7

Une entreprise emploie 100 personnes dans des bureaux répartis sur 3 étages :

1er étage, 2ème étage et 3ème étage. Les employés peuvent accéder à leur bureaux soit par l'ascenseur, soit par les escaliers. Une enquête réalisée dans cet entreprise a donné :

* 75 personnes utilisent l'ascenseur et, parmi celles-ci, 15 vont au 1er étage, 25 vont au 2ème étage et les autres vont au 3ème r étage.

* Les autres personnes utilisent les escaliers et, parmi ces personnes les $\frac{4}{5}$ vont au 1er étage et les autres vont au 2ème étage.

On choisie au hasard une personne de cette entreprise et on définie les événements suivants :

A : « la personne prend l'ascenseur », E_1 : « la personne va au 1er étage », E_2 : « la personne va au 2ème étage » et E_3 : « la personne va au 3ème étage ».

1) Traduire l'énoncé par un arbre pondéré.

2) a) Calculer la probabilité que la personne aille au 2ème étage par l'ascenseur .

b) Montrer que les événements E_1 et E_3 sont équiprobables.

d) Calculer la probabilité que la personne prenne l'ascenseur sachant qu'elle va au 2ème étage.

3) On interroge 6 personnes de cette entreprise. (Les réponses sont indépendantes)

Soit X la variable aléatoire qui, aux 6 personnes interrogées, associe le nombre de personnes allant au 2ème étage.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Déterminer la probabilité, à 10^{-4} près, que 4 personnes exactement aillent au 2ème étage.

c) En moyenne, sur les 6 personnes, combien vont au 2ème étage ?

4) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $n \leq 100$. On interroge n personnes de cette entreprise. On considère l'événement :

B_n « au moins une des n personnes va au 2ème étage »

Déterminer le plus petit entier naturel n strictement positif tel que la probabilité de B_n soit supérieure à ou égale à 0,999999.

Exercice 8

Un composant électronique est soumis à un premier test de contrôle de fonctionnalité. S'il passe ce test avec succès, il est soumis à un deuxième test contrôle de qualité, si non il est détruit.

Une étude statistique a donné :

Le composant a 90% de chance de passer le 1er test avec succès.

Si le composant a passé le 1er test avec succès, il a 95% de chance de passer le 2ème test avec succès.

Le composant n'est commercialisé que s'il passe avec succès les deux tests.

On désigne par : T_1 : l'événement : «Le composant passe avec succès le 1er test ».

T_2 : l'événement : «Le composant passe avec succès le 2ème test ».

C : l'événement : «Le composant est commercialisé ».

1) a) Construire un arbre pondéré de probabilité décrivant les données si dessus indiquées.

b) Calculer la probabilité de l'événement C.

c) Montrer de deux manières différentes que la probabilité pour que le composant ne soit pas commercialisé est égale à 0,145.

2) Un lot de 10 composants arrive à l'atelier de contrôle.

Quelle est la probabilité pour qu'au moins 8 composants du lot soient commercialisés ?

3) La fabrication du composant coûte 25^D, le contrôle de sa fonctionnalité coûte 5^D et le contrôle de sa qualité coûte 3^D.

Quel est le coût total moyen d'un tel composant électronique ?

Exercice 9

Dans une ferme, on produit des œufs de trois tailles différentes :

Des petits (P) dans la proportion de 20%.

Des moyennes (M) dans la proportion de 50%.

Des gros (G) dans la proportion de 30%.

Ils sont de deux qualités : ordinaire (O) et supérieur (S).

On remarque que :

80% des petits œufs sont de qualité ordinaire.

50% des œufs moyens sont de qualité ordinaire.

20% des gros œufs sont de qualité ordinaire.

1) On prend au hasard un œuf. Quelle est la probabilité pour qu'il soit :

   a) De petite taille et de qualité supérieure.

   b) De qualité ordinaire.

   c) De qualité supérieure.

   d) De taille moyenne sachant qu'il est de qualité supérieure.

2) a) Montrer que la probabilité pour qu'un œuf soit gros et de qualité supérieure est égale à 0,24.

   b) On rempli au hasard une boite de 12 œufs. On suppose que les chois des œufs sont indépendants les uns des autres.

Quelle est la probabilité pour que cette boite contienne au moins deux gros œufs et de qualité supérieure.

Exercice 10

Une usine de fabrication de pièces mécaniques comporte deux ateliers de production A_1 et A_2. Une étude statistique de la production mensuelle donne les résultats suivants :

* La production est de 20000 pièces.
* 60% de la production est assurée par l'atelier A_2
* 200 pièces fabriquées sont défectueuses.
* 50 pièces défectueuses proviennent de l'atelier A_1

1) a) Déterminer le nombre de pièces défectueuses qui proviennent de l'atelier A_2

   b) Déterminer le nombre de pièces non défectueuses qui proviennent de l'atelier A_1

   c) Déterminer le nombre de pièces non défectueuses qui proviennent de l'atelier A_2

2) On prélève une pièce au hasard et on désigne par A et D les événements suivants :

   A : « La pièce provient de l'atelier A_1 »

   D : « La pièce prélevée est défectueuse »

a) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse ?

b) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle provienne de A_1 ?

c) Quelle est la probabilité pour que la pièce soit défectueuse sachant qu'elle provienne de A_2 ?

d) Quelle est la probabilité pour que la pièce provienne de l'atelier A_2 sachant qu'elle est défectueuse ?

3) La vente de ces pièces se fait par lot de dix pièces. Un client achète un lot. Déterminer la probabilité pour que le lot ne contienne aucune pièce défectueuse.

Exercice 11

Une usine fabrique des tee-shirts en très grande série. Un tee-shirt peut présenter deux types de défauts :

Défaut portant sur la finition avec une probabilité de 0,03.

Défaut portant sur la couleur avec une probabilité de 0,02.

La probabilité qu'il ait les deux défauts à la fois est de 0,01.

On appelle les évènements :

F : « L'article présente un défaut de finition »

C : « L'article présente un défaut de couleur »

S : « L'article ne présente aucun défaut »

U : « L'article présente un unique défaut »

1) Montrer que $p(S) = 0{,}96$.

2) Calculer $p(U)$

3) Un article sans défaut est vendu pour 40 DT. Son prix est réduit de 30% s'il présente un seul défaut. Il est réduit de 50% s'il présente les deux défauts à la fois.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tee-shirt associe son prix de vente.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Calculer son espérance mathématique $E(x)$. Interpréter se paramètre.

Exercice 12

Un magasin vend trois types de calculatrices, 25% des calculatrices sont de marque Sharp, 35% des calculatrices de marque Casio et 40% des calculatrices sont de marque TI.

On remarque que 20% des calculatrices de marque Sharp sont programmables, 60% des calculatrices de marque Casio sont programmables et 70% des calculatrices de marque TI sont programmables.

On suppose que la marque de la calculatrice n'apparait pas sur l'emballage. On choisit une calculatrice au hasard.

On note : S : « La calculatrice choisie est de marque Sharp ».

C: « La calculatrice choisie est de marque Casio ».

T : « La calculatrice choisie est de marque TI ».

A : « La calculatrice choisie est programmable ».

1) a) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants : $A \cap S$, $A \cap C$ et $A \cap T$.

b) En déduire que $p(A) = 0{,}54$.

2) Sachant que la calculatrice est programmable, calculer la probabilité quelle soit de marque Sharp.

3) On considère un lot de 10 calculatrices. Soit X l'aléa numérique qui prend pour valeurs le nombre de calculatrices programmables.

a) Déterminer la loi de probabilité de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

b) Calculer la probabilité de l'événement :

E : « Avoir au plus 9 calculatrices programmables ».

4) On suppose que la durée de vie en années d'une calculatrice suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}125$

a) Calculer la probabilité qu'une calculatrice ait une vie supérieure à 8 ans.

b) Calculer la probabilité qu'une calculatrice ait une vie inférieure à 36 mois.

c) On sait qu'une calculatrice a déjà fonctionné 4 ans. Quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne avant 10 ans.

Exercice 13

La durée de vie d'un réfrigérateur, exprimée en années, jusqu'à survienne la première panne est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$.

1) Déterminer λ arrondi à 10^{-2} prés, pour que la probabilité qu'un réfrigérateur pris au hasard ne tombe pas en panne au cours des dix premières années soit égale à : $0{,}02$

Pour la suite de l'exercice on prend : $\lambda = 0{,}391$

2) A quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'un réfrigérateur tombe en panne pour la première fois est-elle de : $0{,}45$

3) Montrer que la probabilité qu'un réfrigérateur n'ait pas eu de panne au cours des quinze premières années est de : $0{,}003$

4) Sachant qu'un réfrigérateur n'a pas eu de panne au cours des dix premières années, qu'elle est la probabilité qu'il soit encore en état de marche au bout de quinze ans

5) On considère au hasard un lot de 10 réfrigérateurs fonctionnant de manière indépendante. Déterminer la probabilité que, dans ce lot, il y ait au moins un réfrigérateur qui n'ait pas eu de panne au cours des cinq premières. années.

Exercice 14

I) Une usine fabrique des téléphones portables dont certains présentent deux défauts indépendants, un défaut d'affichage et un défaut du clavier. Un téléphone est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

On note les événements suivants :

A : « le téléphone présente le défaut d'affichage »

C : « le téléphone présente le défaut du clavier »

D : « le téléphone est défectueux »

Une étude statistique a montré que 1% des portables présentent le défaut d'affichage et 3% des portables présentent le défaut du clavier.

1) a) Déterminer $p(A)$ et $p(C)$

b) Calculer la probabilité des événements suivants :

∗ le téléphone présentent les deux défauts.

∗ le téléphone présentent seulement le défaut A.

∗ le téléphone présentent seulement un défaut.

b) Montrer que $p(D) = 0{,}0397$.

2) On considère au hasard un lot de 10 téléphones

a) Quelle est la probabilité que deux téléphones soient défectueux ?

b) Quelle est la probabilité qu'un seul téléphone soit défectueux ?

c) Quel est, par lot de 10 téléphones, le nombre moyen de téléphones défectueux ?

II) On suppose que la durée de vie exprimée en mois d'un téléphone défectueux suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 0{,}745$ et que la durée de vie exprimée en mois d'un téléphone non défectueux suit une loi exponentielle de paramètre λ_2 avec $\lambda_2 > 0$.

1) a) Calculer la probabilité pour qu'un téléphone défectueux ait une durée de vie supérieure à cinq années.

b) Calculer λ_2 pour que la probabilité de durée de vie d'un téléphone non défectueux soit supérieure à cinq années soit égale à 0,3

c) Calculer la probabilité pour qu'un téléphone soit encore en marche après cinq années.

2) Sachant que le téléphone est encore en marche après cinq années qu'elle est la probabilité qu'il soit défectueux ?