

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte.

- 1) Pour tout x de \mathbb{R} le réel $\sin(3\pi - x)$ est égale à :

a) $-\cos x$ b) $-\sin x$ c) $\sin x$ d) $\cos x$
- 2) Pour tout x de \mathbb{R} le réel $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ est égale à :

a) $-\sin x$ b) $\sin x$ c) $\cos x$ d) $-\cos x$
- 3) Soit x un élément de \mathbb{R} le réel $\sin^2(-2x) + \cos^2(-2x)$ est égale à :

a) -2 b) -1 c) 2 d) 1
- 4) Soit a et b deux éléments de \mathbb{R} . Le réel $\cos(b - a)$ est égale à :

a) $\cos b - \cos a$ b) $\sin a \sin b - \cos a \cos b$ c) $\cos a \cos b + \sin a \sin b$
- 5) Soit un réel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{4}$ alors $\sin(\pi + x)$ est égale à :

a) $-\frac{1}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{15}}{4}$

Exercice 2

- 1) a) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation : $\cos x - \sin x = 1$
 b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $1 - 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$
- 2) Résoudre l'inéquation : $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$
 a) dans \mathbb{R} b) dans $[0, 2\pi]$ c) dans $[-\pi, \pi]$
- 3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(3x)(2 \cos x - 1)$. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 3

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sin x \cos(2x) - \cos x \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation : $\cos(2x) + 2 \cos x = -1$
- 3) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $2 \sin x \geq -\sqrt{3}$
- 4) Résoudre dans $[-\pi, 2\pi]$ l'inéquation : $2 \cos x \leq \sqrt{3}$
- 5) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{\sin x}{1 - 2 \cos x} > 0$

Exercice 4

- 1) Résoudre l'inéquation : $2 \sin x \leq 1$
 a) dans \mathbb{R} b) dans $[0, 2\pi]$ c) dans $[-\pi, \pi]$
- 2) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, 2\pi]$ l'équation : $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$
- 3) Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ l'équation : $2 \sin 2x = \sqrt{3}$
- 4) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)(2 \cos x + 1)$
 a) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$

b) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0, \pi]$

Exercice 5

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$; $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x + \pi) = f(x)$

3) a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2 - 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$

c) Calculer $f(0)$ et en déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

4) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \geq 0$

Exercice 6

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 0$

Exercice 7

Sans utiliser une calculatrice calculer les expressions suivantes

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$$

$$C = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} \qquad D = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$E = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{5\pi}{14} + \cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12}$$

Exercice 8

1) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Montrer que : $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$

b) Montrer que : $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2$

2) En déduire que $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \tan^2 \frac{5\pi}{8} = 6$ on remarquera que $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

Exercice 9

Montrer les identités suivantes :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \quad ; \quad \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2} \quad ; \quad \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$$

Exercice 10

On pose

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} \quad \text{et} \quad B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8}$$

- 1) a) Calculer $A + B$
b) Calculer $A - B$
- 2) En déduire A et B

Exercice 11

Pour tout réel x on pose :

$$A(x) = \sqrt{3}\cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2 \left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$B(x) = \sqrt{3}\sin^2 x + \sin^2 \left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$E(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \cos \left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos \left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

- 1) Justifier les égalités suivantes :
 - a) $A(x) + B(x) = 2 + \sqrt{3}$
 - b) $A(x) - B(x) = E(x)$
- 2) a) Montrer que pour tout réel x : $E(x) = 0$
b) En déduire les valeurs de $A(x)$ et $B(x)$
- 3) En calculant $A\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de deux manières, trouver la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$

Exercice 12

- 1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} ; \sin 2x - 2\cos^2 x = 2 \cos x (\sin x - \cos x)$
- 2) Résoudre alors dans l'intervalle $[0, 2\pi]$ l'équation : $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne les points A et B de coordonnées polaires respectives $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$ et $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

- 1) a) Placer les points A et B
b) Calculer $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
c) En déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle en O
- 2) Donner les coordonnées cartésiennes de A et B
- 3) Soit le point C tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$
 - a) Montrer que $OBCA$ est un carré
 - b) Montrer que $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$
 - c) Donner les coordonnées cartésiennes de C
- 4) En déduire $\cos \frac{5\pi}{12} ; \cos \frac{\pi}{12} ; \cos \frac{7\pi}{12} ; \cos \frac{11\pi}{12} ; \sin \frac{5\pi}{12} ; \sin \frac{\pi}{12} ; \sin \frac{7\pi}{12} ; \sin \frac{11\pi}{12}$

Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne les points A et B de coordonnées polaires respectives $(4, \frac{\pi}{4})$ et $(4, \frac{\pi}{3})$

- 1) a) Montrer que le triangle OAB est isocèle
b) Placer dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les points A et B
c) Montrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$
- 2) a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points A et B
b) En déduire que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne le point M de coordonnées $(2\sqrt{3}, 2)$

- 1) Donner les coordonnées polaires de M dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})
- 2) On considère le point N tel que $ON = \frac{1}{2} OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

Déterminer les coordonnées polaires de N dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

- 3) a) En utilisant les formules d'addition, calculer $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{11\pi}{12}$
b) En déduire les coordonnées cartésiennes de N dans (O, \vec{i}, \vec{j})
- 4) Calculer la distance MN et une valeur approchée à 10^{-2} par défaut de $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MN})$

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) on donne les points :

$A(3\sqrt{3}, 3)$; $B(3\sqrt{3}, -3)$ et $C(4\sqrt{3}, 0)$

- 1) a) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\det(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$. En déduire $\cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$ et $\sin(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$.
b) Déterminer alors la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$
- 2) a) Préciser les coordonnées polaires de A et B
b) Placer alors les points A , B et C
c) Donner la mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$
- 3) a) Justifier alors que les points O , A , B et C sont cocycliques
b) Tracer le cercle passant par les points O , A , B et C en précisant les coordonnées de son centre.