

Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte.

- 1) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  le réel  $\sin(3\pi - x)$  est égale à :
  - a)  $-\cos x$
  - b)  $-\sin x$
  - c)  $\sin x$
  - d)  $\cos x$
- 2) Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  le réel  $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$  est égale à :
  - a)  $-\sin x$
  - b)  $\sin x$
  - c)  $\cos x$
  - d)  $-\cos x$
- 3) Soit  $x$  un élément de  $\mathbb{R}$  le réel  $\sin^2(-2x) + \cos^2(-2x)$  est égale à :
  - a)  $-2$
  - b)  $-1$
  - c)  $2$
  - d)  $1$
- 4) Soit  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{R}$ . Le réel  $\cos(b - a)$  est égale à :
  - a)  $\cos b - \cos a$
  - b)  $\sin a \sin b - \cos a \cos b$
  - c)  $\cos a \cos b + \sin a \sin b$
- 5) Soit un réel  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$  tel que  $\cos x = \frac{1}{4}$  alors  $\sin(\pi + x)$  est égale à :
  - a)  $-\frac{1}{4}$
  - b)  $-\frac{\sqrt{15}}{4}$
  - c)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$

Exercice 2

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[-\pi, \pi]$  l'équation :  $\cos x - \sin x = 1$   
 b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $1 - 2 \sin x \cos x = 2 \sin^2 x$
- 2) Résoudre l'inéquation :  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ 
  - a) dans  $\mathbb{R}$
  - b) dans  $[0, 2\pi]$
  - c) dans  $[-\pi, \pi]$
- 3) Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sin(3x)(2 \cos x - 1)$ . Déterminer le signe de  $f(x)$  sur  $[0, \pi]$ .

Exercice 3

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sin x \cos(2x) - \cos x \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) Résoudre dans  $[0, 2\pi]$  l'équation :  $\cos(2x) + 2 \cos x = -1$
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $2 \sin x \geq -\sqrt{3}$
- 4) Résoudre dans  $[-\pi, 2\pi]$  l'inéquation :  $2 \cos x \leq \sqrt{3}$
- 5) Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'inéquation :  $\frac{\sin x}{1 - 2 \cos x} > 0$

Exercice 4

- 1) Résoudre l'inéquation :  $2 \sin x \leq 1$ 
  - a) dans  $\mathbb{R}$
  - b) dans  $[0, 2\pi]$
  - c) dans  $[-\pi, \pi]$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $[0, 2\pi]$  l'équation :  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1$
- 3) Résoudre dans  $[\pi, 2\pi]$  l'équation :  $2 \sin 2x = \sqrt{3}$
- 4) Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)(2 \cos x + 1)$

a) Résoudre dans  $[0, \pi]$  l'équation  $f(x) = 0$

b) Déterminer le signe de  $f(x)$  sur  $[0, \pi]$

### Exercice 5

Soit la fonction  $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x - \sin 2x$

1) Calculer  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$  ;  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  ;  $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  ;  $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$  ;  $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

2) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x + \pi) = f(x)$

3) a) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) Montrer que :  $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = 2 - 4 \sin^2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$

c) Calculer  $f(0)$  et en déduire la valeur exacte de  $\sin \frac{\pi}{12}$

4) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) + 1 \geq 0$

### Exercice 6

1) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R} ; \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 0$

### Exercice 7

Sans utiliser une calculatrice calculer les expressions suivantes

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

$$B = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$$

$$C = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12} \quad D = \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{5\pi}{12}$$

$$E = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{5\pi}{14} + \cos^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \frac{11\pi}{12}$$

### Exercice 8

1) Soit  $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{k \frac{\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Montrer que :  $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$

b) Montrer que :  $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2$

2) En déduire que  $\tan^2 \frac{\pi}{8} + \tan^2 \frac{5\pi}{8} = 6$  on remarquera que  $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

### Exercice 9

Montrer les identités suivantes :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2 \quad ; \quad \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2} \quad ; \quad \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1 - \sin 2x}{1 + \sin 2x}$$

### Exercice 10

On pose

$$A = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} \quad \text{et} \quad B = \sin^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \frac{3\pi}{8} + \sin^2 \frac{5\pi}{8}$$

1) a) Calculer  $A + B$

b) Calculer  $A - B$

2) En déduire  $A$  et  $B$

### Exercice 11

Pour tout réel  $x$  on pose :

$$A(x) = \sqrt{3}\cos^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \cos^2 \left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$B(x) = \sqrt{3}\sin^2 x + \sin^2 \left(x + \frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2 \left(x - \frac{5\pi}{12}\right)$$

$$E(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \cos \left(2x + \frac{5\pi}{6}\right) + \cos \left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$$

1) Justifier les égalités suivantes :

a)  $A(x) + B(x) = 2 + \sqrt{3}$

b)  $A(x) - B(x) = E(x)$

2) a) Montrer que pour tout réel  $x$  :  $E(x) = 0$

b) En déduire les valeurs de  $A(x)$  et  $B(x)$

3) En calculant  $A\left(\frac{\pi}{12}\right)$  de deux manières, trouver la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$

### Exercice 12

1) Montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$  ;  $\sin 2x - 2\cos^2 x = 2 \cos x (\sin x - \cos x)$

2) Résoudre alors dans l'intervalle  $[0, 2\pi]$  l'équation :  $\sin 2x - 2\cos^2 x = 0$

### Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on donne les points  $A$  et  $B$  de coordonnées polaires respectives  $\left(2, \frac{2\pi}{3}\right)$  et  $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$

1) a) Placer les points  $A$  et  $B$

b) Calculer  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$

c) En déduire que le triangle  $OAB$  est isocèle rectangle en  $O$

2) Donner les coordonnées cartésiennes de  $A$  et  $B$

3) Soit le point  $C$  tel que  $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

a) Montrer que  $OBCA$  est un carré

b) Montrer que  $(\vec{i}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$

c) Donner les coordonnées cartésiennes de  $C$

- 4) En déduire  $\cos \frac{5\pi}{12}$  ;  $\cos \frac{\pi}{12}$  ;  $\cos \frac{7\pi}{12}$  ;  $\cos \frac{11\pi}{12}$  ;  $\sin \frac{5\pi}{12}$  ;  $\sin \frac{\pi}{12}$  ;  $\sin \frac{7\pi}{12}$  ;  $\sin \frac{11\pi}{12}$

### Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on donne les points  $A$  et  $B$  de coordonnées polaires respectives  $(4, \frac{\pi}{4})$  et  $(4, \frac{\pi}{3})$

- 1) a) Montrer que le triangle  $OAB$  est isocèle
- b) Placer dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les points  $A$  et  $B$
- c) Montrer que  $(\vec{OA}, \vec{OB}) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$
- 2) a) Calculer les coordonnées cartésiennes des points  $A$  et  $B$
- b) En déduire que  $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

### Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on donne le point  $M$  de coordonnées  $(2\sqrt{3}, 2)$

- 1) Donner les coordonnées polaires de  $M$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 2) On considère le point  $N$  tel que  $ON = \frac{1}{2}OM$  et  $(\vec{OM}, \vec{ON}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi]$

Déterminer les coordonnées polaires de  $N$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 3) a) En utilisant les formules d'addition, calculer  $\cos \frac{11\pi}{12}$  et  $\sin \frac{11\pi}{12}$
- b) En déduire les coordonnées cartésiennes de  $N$  dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 4) Calculer la distance  $MN$  et une valeur approchée à  $10^{-2}$  par défaut de  $(\vec{MO}, \vec{MN})$

### Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on donne les points :

$A(3\sqrt{3}, 3)$  ;  $B(3\sqrt{3}, -3)$  et  $C(4\sqrt{3}, 0)$

- 1) a) Calculer  $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$  et  $\det(\vec{CA}, \vec{CB})$ . En déduire  $\cos(\vec{CA}, \vec{CB})$  et  $\sin(\vec{CA}, \vec{CB})$ .
- b) Déterminer alors la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{CA}, \vec{CB})$
- 2) a) Préciser les coordonnées polaires de  $A$  et  $B$
- b) Placer alors les points  $A$ ,  $B$  et  $C$
- c) Donner la mesure principale de l'angle orienté  $(\vec{OA}, \vec{OB})$
- 3) a) Justifier alors que les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont cocycliques
- b) Tracer le cercle passant par les points  $O$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$  en précisant les coordonnées de son centre.