Exercice N°1

Calculer : $A = \cos^2\frac{\pi}{5} + \sin^2\frac{4\pi}{5} + \cos^2\frac{2\pi}{5} + \sin^2\frac{3\pi}{5}$.

Exercice N°2

Démontrer les égalités :

1°) $(1 + tg^2 x)(1 - \sin^2 x) = 1$.

2°) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x - \sin x}{\sin x} = \frac{tg\, x}{\sin^2 x}$.

Exercice N°3

Soit $\alpha \in [0; \pi]$ tel que : $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$.

1°) Calculer $\sin\alpha$; $tg\,\alpha$ et $cotg\,\alpha$.

2°) Construire un angle $\widehat{xOy}$ tel que : $\widehat{xOy} = \alpha$.

Exercice N°4

Résoudre dans $[0 ; \pi]$ les équations :

1°) $2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0$.

2°) $3\, cotg^2 x + (3 - \sqrt{3})\, cotg\, x - \sqrt{3} = 0$.

Exercice N°5

Résoudre dans IR les équations :

1°) $(\sin^2\alpha)x^2 + 2x + 1 = 0$ où $\alpha \in [0; \pi]$.

2°) $(cotg\,\alpha)x^2 - 2x - cotg\,\alpha = 0$ où $\alpha \in]0; \pi[$.

Exercice N°6

Soit un réel $a \in]0; 2[$ et le réel $\alpha \in [0; \pi]$ tel que: $tg\,\alpha = \frac{4a}{a^2 - 4}$.

Calculer, en fonction de a, $\cos\alpha$; $\sin\alpha$ et $cotg\,\alpha$.

Exercice N°7

Résoudre dans $[0 ; \pi]$ les équations :

1°) $2\sin^2 x - (1 + \sqrt{2})\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.

2°) $\cos^2 x = -\cos x$.

Exercice N°8

Construire un angle obtus $\widehat{xOy}$ tel que : $\sin\widehat{xOy} = \frac{1}{3}$.

Exercice N°9

ABC est un triangle quelconque, on pose a = BC, b = AC et c = AB. Démontrer les égalités :

a) $a = b.\cos C + c.\cos B$

b) $b = c.\cos\hat{A} + a.\cos C$

c) $b^2 - c^2 = a..(b.\cos C - c.\cos B)$

d) $a^2 + b^2 + c^2 = 2cb.\cos\hat{A} + 2ac.\cos B + 2ab.\cos C$

e) $\sin\hat{A} = \sin B.\cos C + \sin C.\cos B$

f) $\sin\hat{A} = (\tan B + \tan C).\cos B.\cos C$

g) On pose $2p = a + b + c$. Montrer que : $\sin\hat{A} = \frac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

h) $\tan\hat{A} = \frac{4S}{b^2 + c^2 - a^2}$

i) $h_A = 2R\sin B.\sin C$; où h_A désigne la hauteur issue de A.

j) $\frac{\sin^2 A}{h_A^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{2.\cos A}{bc}$

Corrigé

Exercice N°1

On a : $\begin{cases} \dfrac{\pi}{5}+\dfrac{4\pi}{5}=\pi \\ \dfrac{2\pi}{5}+\dfrac{3\pi}{5}=\pi \end{cases}$ donc $\begin{cases} \sin\dfrac{4\pi}{5}=\sin\dfrac{\pi}{5} \\ \sin\dfrac{3\pi}{5}=\sin\dfrac{2\pi}{5} \end{cases}$ et par suite $A=(\cos^2\dfrac{\pi}{5}+\sin^2\dfrac{\pi}{5})+(\cos^2\dfrac{2\pi}{5}+\sin^2\dfrac{2\pi}{5})=2$

Exercice N°2

1) $(1+\tan^2 x)(1-\sin^2 x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}\times\cos^2 x=1$

2) $$\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x-\sin x}{\sin x}=\frac{\cos x.\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x.\sin x}{\cos x.\sin x}$$
$$=\frac{1}{\cos x.\sin x}=\frac{\sin x}{\cos x}.\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{\tan x}{\sin^2 x}$$

Exercice N°3

1) * $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$ et comme $\sin\alpha\geq 0$ donc $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$.

* $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{3}{4}$ * $\text{cotan}\alpha=\dfrac{1}{\tan\alpha}=\dfrac{-4}{3}$

2) Rappelons que dans un triangle ABC rectangle en A on a : $\tan(A\hat{B}C)=\dfrac{AC}{AB}$ donc il suffit de construire un triangle ABC rectangle en A tel que : AC = 3 et AB = 4, l'angle α est tel que : $\alpha=\pi-A\hat{B}C$
(O = B, [Ox) = [BA) et [Oy) = [BC))

<u>Remarque</u> : On peut aussi utiliser $\cos(A\hat{B}C)=\dfrac{AB}{BC}$.

Exercice N°4

1) En posant t = sinx, l'équation s'écrit : $2t^2+5t-3=0$ avec $t\in[0,1]$

$\Delta=49=7^2$ donc $\begin{cases} t'=-3\notin[0,1] \text{ donc à rejeter} \\ t''=\dfrac{1}{2}\in[0,1] \end{cases}$

$\begin{cases} \sin x=\dfrac{1}{2} \\ x\in[0,\pi] \end{cases}$ équivaut à : $x=\dfrac{\pi}{6}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$ d'où $S_{[0,\pi]}=\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\}$

2) <u>Condition :</u> $x\in]0,\pi[$
En posant t = cotanx, l'équation s'écrit : $3t^2+(3-\sqrt{3})t-\sqrt{3}=0$ et $t\in IR$

On remarque que : a – b + c = 0 donc t = - 1 ou $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

* $\begin{cases} \cot an x=-1 \\ x\in]0,\pi[\end{cases}$ équivaut à : $x=\dfrac{3\pi}{4}$ * $\begin{cases} \cot an x=\dfrac{\sqrt{3}}{3} \\ x\in]0,\pi[\end{cases}$ équivaut à : $x=\dfrac{\pi}{6}$

d'où $S_{]0,\pi[}=\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{3\pi}{4}\}$

Exercice N°5

1) $1^{\text{ér}}$ cas : $\alpha \in \{0, \pi\}$

$\sin\alpha = 0$ et par suite l'équation s'écrit : $2x + 1 = 0$ donc $S_{IR} = \{-\frac{1}{2}\}$

$2^{\text{ème}}$ cas : $\alpha \in]0, \pi[$

$\Delta' = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ donc $S_{IR} = \{-1 - \cos\alpha, -1 + \cos\alpha\}$

2) $1^{\text{ér}}$ cas : $\alpha = \frac{\pi}{2}$

l'équation s'écrit : $-2x = 0$ donc $S_{IR} = \{0\}$

$2^{\text{ème}}$ cas : $\alpha \in]0, \pi[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$

$\Delta' = 1 + \cot^2\alpha = (\frac{1}{\sin\alpha})^2$ donc $S_{IR} = \{1 - \frac{1}{\sin\alpha}, 1 + \frac{1}{\sin\alpha}\}$

Exercice N°6

- $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha} = \dfrac{(a^2-4)^2}{(a^2-4)^2+16a^2} = (\dfrac{a^2-4}{a^2+4})^2$

d'autre part, $a \in]0, 2[$ donc $a^2 - 4 < 0$ donc $\tan\alpha < 0$ alors $\cos\alpha < 0$ et par suite $\cos\alpha = \dfrac{a^2-4}{a^2+4}$

- $\sin\alpha = \cos\alpha.\tan\alpha = \dfrac{4a}{a^2+4}$
- $\cot\alpha = \dfrac{a^2-4}{4a}$

Exercice N°7

Un raisonnement analogue à celui de l'exercice N°4 donne les résultats suivants :

1) $\Delta = (1 - \sqrt{2})^2$ $\qquad S_{[0,\pi]} = \{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\}$

2) $S_{[0,\pi]} = \{\frac{\pi}{2}, \pi\}$

Exercice N°8

Même principe que l'exercice N°3 en considérant la formule : $\sin(\widehat{ABC}) = \dfrac{AC}{BC}$

Exercice N°9

a) Les formules d'El Kashi dans le triangle ABC :

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos\widehat{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\widehat{C} \end{cases} \quad \text{équivaut à} \quad \begin{cases} c.\cos\widehat{B} = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} \\ b.\cos\widehat{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} \end{cases}$$

Donc $c.\cos\widehat{B} + b.\cos\widehat{C} = \dfrac{2a^2}{2a} = a$

e) La loi des sinus : $\dfrac{a}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin\widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R$ donc $\sin\widehat{B} = \dfrac{b}{2R}$, $\sin\widehat{C} = \dfrac{c}{2R}$ et $\sin\widehat{A} = \dfrac{a}{2R}$

Alors $\sin\widehat{B}.\cos\widehat{C} + \sin\widehat{C}.\cos\widehat{B} = \dfrac{b.\cos\widehat{C} + c.\cos\widehat{B}}{2R} = \dfrac{a}{2R} = \sin\widehat{A}$.

f)

$$(\tan\widehat{B}+\tan\widehat{C}).\cos\widehat{B}.\cos\widehat{C} = \tan\widehat{B}.\cos\widehat{B}.\cos\widehat{C}+\tan\widehat{C}.\cos\widehat{C}.\cos\widehat{B}$$

$$= \sin\widehat{B}.\cos\widehat{C}+\sin\widehat{C}.\cos\widehat{B} = \sin\widehat{A} \quad (\text{d'aprés e}))$$

f) D'après El Kashi, $.\cos\widehat{A} = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\text{Sin}^2\hat{A} = 1-\cos^2\hat{A} = \frac{1}{(2bc)^2}\left[(2bc)^2-(b^2+c^2-a^2)^2\right] = \frac{1}{(2bc)^2}\left[2bc-(b^2+c^2-a^2)\right].\left[2bc+(b^2+c^2-a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{(2bc)^2}\left[a^2-(b-c)^2\right].\left[(b+c)^2-a^2\right] = \frac{1}{(2bc)^2}(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)$$

Or $2p = a+b+c$ équivaut à $\begin{cases} a+c = 2p-b \\ a+b = 2p-c \\ b+c = 2p-a \end{cases}$

Donc $\sin^2\hat{A} = \dfrac{1}{(2bc)^2}(2p-2b)(2p-2c)(2p-2a)(2p) = \dfrac{4}{(bc)^2}(p-b)(p-c)(p-a)p$

Et comme $\sin\hat{A} > 0$ donc $\sin\hat{A} = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$