Exercice 1

Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte.

1) Pour tout x de $\mathbb{R}$ le réel $\sin(3\pi - x)$ est égale à :

a) $-\cos x$ *b)* $-\sin x$ *c)* $\sin x$ *d)* $\cos x$

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$ le réel $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$ est égale à :

a) $-\sin x$ *b)* $\sin x$ *c)* $\cos x$ *d)* $-\cos x$

3) Soit x un élément de $\mathbb{R}$ le réel $sin^2(-2x) + cos^2(-2x)$ est égale à :

a) -2 *b)* -1 *c)* 2 *d)* 1

4) Soit a et b deux éléments de $\mathbb{R}$. Le réel $\cos(b - a)$ est égale à :

a) $\cos b - \cos a$ *b)* $\sin a \sin b - \cos a \cos b$ *c)* $\cos a \cos b + \sin a \sin b$

5) Soit un reel $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ tel que $\cos x = \frac{1}{4}$ alors $\sin(\pi + x)$ est égale à :

a) $-\frac{1}{4}$ *b)* $-\frac{\sqrt{15}}{4}$ *c)* $\frac{\sqrt{15}}{4}$

Exercice 2

1) *a)* Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[-\pi, \pi]$ l'équation : $\cos x - \sin x = 1$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1 - 2\sin x \cos x = 2sin^2 x$

2) Résoudre l'inéquation : $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

a) dans $\mathbb{R}$ b) dans $[0, 2\pi]$ c) dans $[-\pi, \pi]$

3) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin(3x)\,(2\cos x - 1)$. Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0, \pi]$.

Exercice 3

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x \cos(2x) - \cos x \sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation : $\cos(2x) + 2\cos x = -1$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2\sin x \geq -\sqrt{3}$

4) Résoudre dans $[-\pi, 2\pi]$ l'inéquation : $2\cos x \leq \sqrt{3}$

5) Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'inéquation : $\frac{\sin x}{1 - 2\cos x} > 0$

Exercice 4

1) Résoudre l'inéquation : $2\sin x \leq 1$

a) dans $\mathbb{R}$ *b)* dans $[0, 2\pi]$ *c)* dans $[-\pi, \pi]$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, 2\pi]$ l'équation : $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$

3) Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ l'équation : $2\sin 2x = \sqrt{3}$

4) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)(2\cos x + 1)$

a) Résoudre dans $[0\,,\pi]$ l'équation $f(x) = 0$

b) Déterminer le signe de $f(x)$ sur $[0\,,\pi]$

Exercice 5

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$

1) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$; $f\left(\frac{4\pi}{3}\right)$; $f\left(\frac{5\pi}{4}\right)$

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x+\pi) = f(x)$

3) **a)** Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = 2 - 4sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)$

c) Calculer $f(0)$ et en déduire la valeur exacte de $\sin\frac{\pi}{12}$

4) **a)** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$

b) Résoudre dans IR l'inéquation : $2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right) + 1 \geq 0$

Exercice 6

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$; $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{2}\sin x = 0$

Exercice 7

Sans utiliser une calculatrice calculer les expressions suivantes

$$A = cos^2\frac{\pi}{8} + cos^2\frac{3\pi}{8} + cos^2\frac{5\pi}{8} + cos^2\frac{7\pi}{8}$$

$$B = sin^2\frac{\pi}{12} + sin^2\frac{3\pi}{12} + sin^2\frac{5\pi}{12} + sin^2\frac{7\pi}{12} + sin^2\frac{9\pi}{12} + sin^2\frac{11\pi}{12}$$

$$C = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} + \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12} \qquad D = \cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{5\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$$

$$E = cos^2\frac{\pi}{7} + cos^2\frac{5\pi}{14} + cos^2\frac{\pi}{12} + cos^2\frac{11\pi}{12}$$

Exercice 8

1) Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{k\frac{\pi}{2}\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

a) Montrer que : $\tan x + \frac{1}{\tan x} = \frac{2}{\sin 2x}$

b) Montrer que : $\tan^2 x + \frac{1}{\tan^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} - 2$

2) En déduire que $\tan^2\frac{\pi}{8} + \tan^2\frac{5\pi}{8} = 6$ on remarquera que $\frac{5\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$

Exercice 9

Soit x un réel, montrer les identités suivantes :

$$\frac{\sin 3x}{\sin x}-\frac{\cos 3x}{\cos x}=2 \quad ; \quad \frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\tan\frac{x}{2} \quad ; \quad tan^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}$$

Exercice 10

On pose

$$A=cos^2\frac{\pi}{8}+cos^2\frac{3\pi}{8}+cos^2\frac{5\pi}{8} \quad \text{et} \quad B=sin^2\frac{\pi}{8}+sin^2\frac{3\pi}{8}+sin^2\frac{5\pi}{8}$$

1) *a)* Calculer $A+B$

b) Calculer $A-B$

2) En déduire A et B

Exercice 11

Pour tout réel x on pose :

$$A(x)=\sqrt{3}cos^2x+cos^2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+cos^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$B(x)=\sqrt{3}sin^2x+sin^2\left(x+\frac{5\pi}{12}\right)+sin^2\left(x-\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$E(x)=\sqrt{3}\cos 2x+\cos\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+\cos\left(2x-\frac{5\pi}{6}\right)$$

1) Justifier les égalités suivantes :

a) $A(x)+B(x)=2+\sqrt{3}$

b) $A(x)-B(x)=E(x)$

2) *a)* Montrer que pour tout réel x : $E(x)=0$

b) En déduire les valeurs de $A(x)$ et $B(x)$

3) En calculant $A\left(\frac{\pi}{12}\right)$ de deux manières, trouver la valeur exacte de $\cos\frac{\pi}{12}$