Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

1) Construire les points E, F, K et G tels que

$t_{3\overrightarrow{AE}}(A) = B$; $t_{\overrightarrow{CE}}(E) = F$; $t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}}(B) = E$ et $t_{2\overrightarrow{DE}}(D) = K$

2) Montrer que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BK}$

3) Prouver que le triangle FKG est l'image du triangle ABD par une translation que l'on caractérisera

Exercice 2

Soit Δ une droite et soient les points A, B, C et D de Δ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Soit le point I n'appartenant pas à Δ. La parallèle à la droite (IA) passant par C et la parallèle à la droite (IB) passant par D se coupent en I'.

1) Faire un figure.

2) Soit $t_{\overrightarrow{AC}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

a) Déterminer $t_{\overrightarrow{AC}}\big((IA)\big)$

b) Montrer que $t_{\overrightarrow{AC}}(B) = D$

c) Déterminer alors $t_{\overrightarrow{AC}}\big((IB)\big)$.

3) En déduire que $t_{\overrightarrow{AC}}(I) = I'$

Exercice 3

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité ; I le milieu de $[BC]$ et J le milieu de $[AB]$

1) a) Construire $E = t_{\overrightarrow{AB}}(B)$ et $F = t_{\overrightarrow{AB}}(C)$

b) Montrer que les triangles ABC et BEF sont isométriques.

2) Soit $K = t_{\overrightarrow{AB}}(I)$ montrer que K est le milieu de [EF].

Soit $G' = t_{\overrightarrow{AB}}(G)$

Montrer, par deux méthodes, que G' est le centre de gravité du triangle BEF.

Exercice 4

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et A est un point de $\mathcal{C}$ et B un point extérieur à ce cercle.

1) a) Déterminer et construire la droite Δ image de la droite (OA) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b) Déterminer et construire le cercle $\mathcal{C}$' image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

2) La parallèle à (OB) passant par A coupe Δ en un point C.

a) Quelle est l'image de (AC) par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

b) Montrer que $t_{\overrightarrow{OB}}(A) = C$.

c) En déduire que les droites (OA) et (BC) sont parallèles.

Exercice 5

Soient C et C' deux cercles de centres respectifs O et O' de même rayon et sécants en A et B.

1) Montrer que : $t_{\overrightarrow{OO'}}(C) = C'$.

2) a) Soit $A' = t_{\overrightarrow{OO'}}(A)$, montrer que $A' \in C'$.

b) Montrer que les points B, O' et A' sont alignés.

3) La droite (AO) recoupe C en E.

a) Montrer que $t_{\overrightarrow{OO'}}\big((AE)\big) = (A'B)$.

b) En déduire que $B = t_{\overrightarrow{OO'}}(E)$.

4) La droite (BE) recoupe C' en F.

a) Déterminer $t_{\overrightarrow{OO'}}\big((BE)\big)$

b) En déduire $t_{\overrightarrow{OO'}}(B)$

Exercice 6

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de diamètre $[AB]$, et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre B et passant par O, la droite (AB) recoupe $\mathcal{C}'$ en C.

1) Déterminer $t_{\overrightarrow{AO}}(\mathcal{C})$ et $t_{\overrightarrow{AO}}\big((AB)\big)$.

2) Montrer que $t_{\overrightarrow{AO}}(B) = C$.

3) Soit H un point variable sur $\mathcal{C}$ distinct de A et B, L le point diamétralement opposé à H et $K = S_B(L)$.

a) Montrer que : $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{LC}$ et $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{OC}$.

b) On suppose que O et C sont fixes, déterminer l'ensemble des points K lorsque H varie.

Exercice 7

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principale A.

1) a) Construire le point I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

b) Montrer que I est le barycentre des points pondérés $(A\,,3)$ et $(C\,,1)$.

c) Soit $O = A * B$. Construire le point J tel que $t_{\overrightarrow{AO}}(I) = J$.

d) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AJ}$.

2) Montrer que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$. En déduire que $t_{\overrightarrow{AO}}\big((CD)\big) = (CD)$.

3) a) Montrer que $t_{\overrightarrow{AO}}\big((AC)\big) = (OJ)$.

b) La droite (OJ) coupe la droite (CD) en un point K. Montrer que $t_{\overrightarrow{AO}}\big((C)\big) = K$.

c) En déduire que J est le barycentre des points pondérés $(O\,,3)$ et $(K\,,1)$.

4) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon AB et $B' = S_A(B)$.

a) Montrer que C appartient au cecle $\mathcal{C}$.

b) En déduire l'ensemble des points K lorsque C varie.

Exercice 8

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de diamètre $[BC]$.

1) Construire le cercle $\mathcal{C}'$ image de $\mathcal{C}$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$.

2) Soit A un point de $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$, Δ parallèle à (BC) et passant par A qui recoupe $\mathcal{C}$ en E et coupe $\mathcal{C}'$ en F.

a) Déterminer $t_{\overrightarrow{OB}}(\Delta)$.

b) Déterminer $t_{\overrightarrow{OB}}(A)$.

c) Montrer que $A = E * F$.

3) Soit M un point variable de $\mathcal{C}$ distinct de A et E et soit le point N tel que $AEMN$ est un parallélogramme, soit le point G tel que $\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MN}$.

a) Montrer que $\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{CB}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble des points G lorsque M varie.

Exercice 9

Soient A, B et C trois points non alignés et soit $[AH]$ la hauteur issue de A.

1) Construire B' et C' tel que $t_{\overrightarrow{AH}}(B) = B'$ et $t_{\overrightarrow{AH}}(C) = C'$.

2) **a)** Montrer que les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles.

b) En déduire que $(AH) \perp (B'C')$.

2) Soit le point $H' = t_{\overrightarrow{AH}}(H)$, montrer que $[AH']$ est une hauteur du triangle $AB'C'$.

a) Montrer que les points A, H et H' sont alignés.

b) en déduire que $[AH]$ est une hauteur du triangle $AB'C'$.

Exercice 10

On considère deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs O_1 et O_2, de même rayon et sécants en A_1 et B_1.

La droite Δ parallèle à (O_1O_2) et passant par A_1 coupe $\mathcal{C}_2$ en A_2

1) Quelle est l'image de $\mathcal{C}_1$ par $t_{\overrightarrow{O_1O_2}}$? Justifier.

2) Quelle est l'image de Δ par $t_{\overrightarrow{O_1O_2}}$? Justifier.

3) Montrer que $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

4) La droite D_1 menée de A_2 et parallèle à (A_1B_1) et la droite D_2 menée de O_2 et parallèle à (O_1B_1) se coupent en un point B_2.

a) Montrer que $\overrightarrow{O_1O_2} = \overrightarrow{B_1B_2}$.

b) Déduire que B_2 appartient au cercle $\mathcal{C}_2$

Exercice 11

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O et I le barycentre des points pondérés $(A, -1)$ et $(D, 2)$.

1) **a)** Faire un figure.

b) Montrer que B le barycentre des points pondérés $(D, 1)$ et $(O, -2)$.

2) On considère la translation $t_{\overrightarrow{AD}}$ de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

a) Montrer que $t_{\overrightarrow{AD}}(D) = I$.

b) Déterminer $t_{\overrightarrow{AD}}(B)$.

3) Soient la droite Δ parallèle à (BC) et passant par O et la droite Δ' parallèle à (AC) et passant par D. Les droites Δ et Δ' se coupent en O'.

a) Déterminer $t_{\overrightarrow{AD}}(\Delta)$ et $t_{\overrightarrow{AD}}\big((AC)\big)$.

b) En déduire que $t_{\overrightarrow{AD}}(O) = O'$.

c) Montrer que C le barycentre des points pondérés $(I\,,1)$ et $(O'\,,-2)$.

Exercice 12

Soit ABC un triangle rectangle en A et on désigne par O le milieu de $[BC]$. Soient : I le barycentre des points pondérés $(A,4)$ et $(B,1)$; J le barycentre des points pondérés $(A,4)$ et $(C,-1)$ et G le barycentre des points pondérés $(A,4)$; $(B,1)$ et $(C,-1)$

1) Construire I et J.

2) Montrer que les droites $(C\,I)$ et $(B\,J)$ se coupent en G.

3) Montrer que les droites (AG) et (BC) sont parallèles.

4) Soit l'application $t : P \to P$; $M \mapsto M'$ tel que $4\overrightarrow{MA} = 4\overrightarrow{M'A} + \overrightarrow{M'B} - \overrightarrow{M'C}$

a) Montrer t est une translation de vecteur $\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

b) Soit $\mathcal{C}=\{M \in P \setminus \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB}\|\}$

Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre $[BC]$.

c) Construire sont image $\mathcal{C}'$ par t.

d) Montrer que G appartenant à $\mathcal{C}'$.

5) Le cercle $\mathcal{C}'$ coupe la droite (BC) en E et F (avec $\in [BC]$), Δ_1 la parallèle à (CI) issue de F et Δ_2 la parallèle à (BJ) issue de E se coupent en K.

a) Déterminer les images des droites (CI) et (BJ) par t.

b) Montrer que G est le milieu de $[AK]$

c) On suppose que B et C sont fixes et que A varie sur quelle ligne se déplace le point K.