SUITES REELLES 4eme Sc Tec

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = 2 - \frac{1}{U_n}$

1) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$
3) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissant

   b) En déduire que (U_n) est convergente

   c) Calculer alors la limite de la suite (U_n)
4) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{3U_n-2}{U_n-1}$

   a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique

   b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

   c) Retrouver alors la limite de (U_n)

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique
2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite
3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

   b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$

   c) Exprimer U_n en fonction de n puis retrouver $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+4} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

   b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$
3) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $(1-U_{n+1})-\frac{2}{3}(1-U_n)=\frac{2({U_n}^2-1)}{3(U_n+4)}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|1-U_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|1-U_n|$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|1-U_n| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2\sqrt{5} \\ U_{n+1} = \frac{{U_n}^2+5}{2U_n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq \sqrt{5}$

b) Etudier les variations de la suite (U_n)

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-\sqrt{5}}{U_n+\sqrt{5}}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} = {V_n}^2$

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \ln V_n$

a) Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique de raison 2

b) Exprimer W_n en fonction de n

c) En déduire V_n puis U_n en fonction de n

d) Retrouver alors la limite de la suite (U_n)

Exercice 5

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$; $U_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2}-U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < \sqrt{2}$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n}{\sqrt{2}-U_n}$

a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-U_n}$

b) En déduire que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison 1

c) Exprimer V_n en fonction de n et montrer que $U_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$

3) On posse pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $W_n = ln(U_n)$ et $S_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n = \frac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1)$

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 6

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{5U_n - 3}{U_n + 1}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_{n+1} = 5 - \frac{8}{U_n + 1}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $1 < U_n < 3$

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n - 1)(U_n - 3)}{U_n + 1}$

b) Montrer alors que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n - 1}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Calculer $V_0 + V_1 + V_2 \dots + V_n$

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} V_n$

3) a) Exprimer V_n en fonction de n en déduire U_n en fonction de n

b) Retrouver alors la limite de la suite (U_n)

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = \frac{2}{U_n - 1}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $W_n - 1 = -V_n$

b) Calculer $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 4}$

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n)

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{9}|U_n - 1|$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq 4 \times \left(\frac{1}{9}\right)^n$ et Retrouver la limite de (U_n)

Exercice 8

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}{U_n}^2 + 1}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

2) a) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

b) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = {U_n}^2 - 2$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n)

Exercice 9

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = 1 + \sqrt{U_n - 1}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \leq U_n \leq 2$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \ln(U_n - 1)$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 10

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2}{2U_n - 1}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 4$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soient les suites (V_n) et (W_n)définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - \frac{1}{U_n}$ et $W_n = \ln(V_n)$

a) Exprimer V_{n+1} en fonction de V_n

b) En déduire que la suite (W_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $W_0 = -\ln 2$

c) Exprimer alors (W_n) en fonction de n

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

d) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 11

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4e^3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = 2\sqrt{U_n}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 4$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \ln\left(\frac{U_n}{4}\right)$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison

b) Exprimer V_n en fonction

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = 4e^{\frac{3}{2^n}}$

d) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 12

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = U_n e^{-U_n}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) La suite (U_n) est-elle convergente ? si oui calculer sa limite

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \ln U_n$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = V_n - V_{n+1}$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$ $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$ montrer que $S_n = V_0 - V_{n+1}$

c) En déduire la limite de la suite (S_n)

Exercice 13

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\int_1^e (\ln x)^n \, dx$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \geq 0$

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [1\,, \mathrm{e}]$ on a : $\frac{1}{n+1}(\ln x)^{n+1} \leq \frac{1}{n}(\ln x)^n$

b) En déduire que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente

3) a) En utilisant une intégration par partie, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+1} = \frac{e}{n+1} - nU_n$

b) Calculer U_1 , U_2 et U_3

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n \leq \frac{e}{n}$ et en déduire alors la limite de la suite (U_n)

Exercice 14

1) On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^1 e^{-nx}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$

b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nU_n$

2) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx$

a) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $2 \leq e^x + 1 \leq 2e^x$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{2}U_{n+1} \leq V_n \leq \frac{1}{2}U_n$

c) En déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nV_n$

Exercice 15

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2} dx$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 0$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{n+1}$

2) Calculer U_1 , U_2 et U_3

3) Montrer que (U_n) est décroissante

4) En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite

Exercice 16

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$

1) a) Montrer que la suite (U_n) $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ est à termes positifs

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

2) a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$; calculer la dérivée de la fonction $g: x \mapsto (\tan x)^{n+1}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_n + U_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

<u>Exercice 17</u>

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 x^n e^{-2x}\,dx$

1) a) Calculer I_0 et I_1

b) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $\forall n \in \mathbb{N}$

on a : $2I_{n+1} = (n+1)I_n - e^{-2}$

c) En déduire que $I_2 = \frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$

2) On pose $J = \int_0^1 (5x^2 + x - 3)e^{-2x}\,dx$. Calculer J

3) a) Montrer que $\forall x \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq x^n e^{-2x} \leq x^n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{1}{1+n}$

c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$