Prof : MERSANI IMED 4 Sc. Exp A.S : 2023-2024	Série N°1	
	Chapitre : Suites réelles	Section : Sc. Exp
	Octobre 2023	Coefficient : 4

❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊ ❊

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2+3}{U_n+1}, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2 \leqslant U_n \leqslant 3$.

2) **a/** Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b/ En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) **a/** Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n+1}(3 - U_n)$.

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - U_{n+1} \leqslant \dfrac{3}{4}(3 - U_n)$.

b/ Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $3 - U_n \leqslant \left(\dfrac{3}{4}\right)^n$ et retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2

Soit α un réel strictement supérieur à 1. On considère la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2\alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 + \alpha^2}{2U_n}$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > \alpha$.

a/ Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(\alpha - U_n)(\alpha + U_n)}{2U_n}$ et en déduire que la suite (U_n) est décroissante.

b/ Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) **a/** Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - \alpha = \dfrac{U_n - \alpha}{2U_n}(U_n - \alpha)$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - \alpha \leqslant \dfrac{1}{2}(U_n - \alpha)$.

b/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - \alpha \leqslant \alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \sqrt{2U_n}$.

1) **a/** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 2$.

b/ Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n(2-U_n)}{\sqrt{2U_n} + U_n}$ et en déduire que la suite (U_n) est décroissante.

c/ Montrer alors que la suite (U_n) est convergente et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

2) **a**/ Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 2 = \dfrac{2}{\sqrt{2U_n}+2}(U_n - 2)$ et que $U_{n+1} - 2 \leqslant \dfrac{1}{2}(U_n - 2)$.

b/ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - 2 \leqslant 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 4

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 - 3U_n + 6}{U_n - 1}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leqslant U_n \leqslant 4$.

2) **a**/ Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

b/ En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) **a**/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 3 \leqslant \dfrac{1}{2}(U_n - 3)$.

b/ En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n - 3 \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4) **a**/ Montrer que pour tout entier $n \geqslant 4$, $2^n \geqslant n^2$.

b/ En déduire que pour tout entier $n \geqslant 4$, $n(U_n - 3) \leqslant \dfrac{1}{n}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} n(U_n - 3)$.

Exercice 5

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{U_n}$.

1) **a**/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 3$.

b/ Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c/ En déduire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) **a**/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 3 \leqslant \dfrac{1}{3}(U_n - 3)$.

b/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - 3 \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ puis retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice 6

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2}$.

1) **a**/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b/ Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire que (U_n) est convergente.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \dfrac{1}{\sqrt{U_n}}$.

a/ Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

b/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a/ Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b/ Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k \leqslant \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \leqslant 1 - \frac{1}{n+1}$.

c/ Montrer que la suite (S_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 7

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n^2 + 3U_n + 1$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 0$.

2) **a/** Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b/ Montrer par l'absurde que la suite (U_n) n'est pas majorée.

c/ En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k + 2}$.

a/ Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{U_k + 2} = \frac{1}{U_k + 1} - \frac{1}{U_{k+1} + 1}$.

b/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = 1 - \frac{1}{U_{n+1} + 1}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 8

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1 + U_n^2}{2U_n}$.

1) **a/** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geqslant 1$.

b/ Étudier la monotonie de la suite (U_n). En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) **a/** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b/ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^n}$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n < S_n \leqslant n + 1 - \frac{1}{2^n}$.

b/ Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 9

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} - 1$.

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 1$.

2) Étudier la monotonie de la suire (U_n). En déduire que la suite (U_n) est convergente.

3) **a/** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}(U_n - 1)$.

b/ En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n - 1 \leqslant \frac{1}{2^n}$ puis retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n < S_n \leqslant n + 1 - \frac{1}{2^n}$.

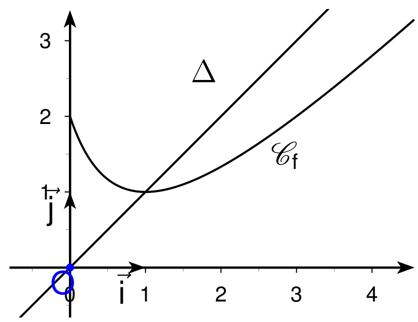
b/ En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ et la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = f(U_n)$.

On a représenté ci-contre, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.

1) En utilisant le graphique, déterminer le sens de vartaion de f sur $[1,2]$, résoudre dans $[1,2]$ l'équation $f(x) = x$ et déterminer le signe de $f(x) - x$ pour $x \in]1,2]$.



2) **a/** Réprésenter sur le graphique, les réels U_0, U_1 et U_2.

b/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < U_n \leqslant 2$.

c/ Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

d/ Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

3) On admet que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $U_k \leqslant 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^k$ et on définit la suite (S_n) sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} U_k$.

a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 < S_n \leqslant 1 + \frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$.

b/ En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.