Série d'exercices n 4

Exercice 1

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{4u_n^2+1}} \quad ;\forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$

2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente puis calculer sa limite .

3. On considère la suite (v_n) définie par: $v_n = \dfrac{1}{4u_n^2}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

   a) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique .
   b) Écrire v_n en fonction de n puis en déduire u_n en fonction de n
   c) Retrouver $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
   d) On pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} v_k$, $n \in \mathbb{N}^*$, calculer S_n en fonction de n puis trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{S_n}{n^2}$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :$U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$

1. Montrer que (U_n) est croissante .

2. On définie la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = U_n + \dfrac{1}{n.n!}$,$\forall n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que (V_n) est décroissante .

3. a) Montrer que $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ on a : $U_p \leq V_q$
   b) En déduire que chacune des suites (U_n) et (V_n) est convergente .
   c) Vérifier que (U_n) et (V_n) sont adjacentes et qu'elles convergent vers la même limite ℓ

Exercice 3

Soit (U_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}^*$ par :$U_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k+n^2}$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{n}{n+n^2} \leq U_n \leq \dfrac{n}{1+n^2}$.

2. En déduire que (U_n) est convergente .

Exercice 4

On considère les deux suites à termes positifs (U_n) et (V_n) définies par : $U_0 = a$, $V_0 = b$, $U_{n+1} = \sqrt{U_n V_n}$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < a < b$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq V_n$
2. Montrer que chacune de ces suites est monotone
3. En déduire de ce qui précéde que ces suites sont convergentes
4. a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(V_{n+1} - U_{n+1}) \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n - U_n \leq (b-a)(\frac{1}{2})^n$

   c) Vérifier alors que (U_n) et (V_n) sont adjacentes .

Exercice 5

Soit (U_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{2}{U_n} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 1$

   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

   c) Montrer que (U_n) diverge vers $+\infty$
2. On considère la suite (V_n) définie par: $V_n = \frac{U_n^2}{4}$; $(\forall n \in \mathbb{N})$

   a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $V_{n+1} - V_n \geq 1$

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \geq n$. Déduire la limite de V_n

   c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 \leq V_{n+1} - V_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$. Déduire la limite de $(V_{n+1} - V_n)$

Exercice 6

Soit (U_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2U_n + 3} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leq U_n < 3$

   b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

   c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite
2. a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < 3 - U_{n+1} \leq \frac{2}{5}(3 - U_n)$

   b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < 3 - U_n \leq 3\left(\frac{2}{5}\right)^n$

   c) Retrouver la limite de la suite (U_n)

3 Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par ,$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $V_n = n(3-U_n)$

ⓐ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} \leq \left(\dfrac{2}{5}\right) \times \left(\dfrac{n+1}{n}\right)$, puis $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)$

ⓑ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^{n-1}$

4 On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} kU_k$,$n \in \mathbb{N}^*$.

ⓐ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq 3n\left(\dfrac{n+1}{2}\right) - S_n \leq 5\left(1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^n\right)$

ⓑ En déduire la limite de $\dfrac{S_n}{n^2}$

Exercice 7

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$

1 Montrer que la suite (U_n) est décroissante et minorée .

2 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + \frac{1}{2^n}$, en déduire la limite de (U_n)

3 On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^{k-1}}$,$n \in \mathbb{N}^*$.

ⓐ Montrer que $S_n = -U_n + 4\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

ⓑ En déduire la limite de S_n

4 Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par ,$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $V_n = n\,(sinx)^{n-1}$, avec $x \in]0;\dfrac{\pi}{6}[$

ⓐ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$;$V_n \leq U_n$, en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

ⓑ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_{n+1} = (sinx)V_n + (sinx)^n$

5 On pose $S'_n = \sum_{k=1}^{n} k\,(sinx)^{k-1}$,$n \in \mathbb{N}^*$.

ⓐ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S'_n = \left(\dfrac{sinx}{sinx-1}\right)V_n + \dfrac{1-(sinx)^n}{(1-sinx)^2}$

ⓑ Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 8

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+U_n} \quad ;\forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1 ⓐ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq \dfrac{3}{2}$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|U_{n+1}-U_n| \leq \frac{1}{4}|U_n - U_{n-1}|$

2 On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n = U_{2n}$ et $\beta_n = U_{2n+1}$

(a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\beta_n = 1 + \frac{1}{1+\alpha_n}$

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha_n \leq \beta_n$

(c) Montrer que (α_n) est croissante et que (β_n) est décroissante .

(d) Vérifier alors que (α_n) et (β_n) sont adjacentes .

3 Montrer que $|U_{n+1} - \sqrt{2}| \leq \frac{1}{4}|U_n - \sqrt{2}|$

4 En déduire la limite de la suite (U_n)

Exercice 9

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1+U_n} \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1 (a) Montrer que $\forall n \geq 2$,on a : $n < U_n < n+1$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

(b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

2 Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$, par : $V_n = \frac{1}{U_n - n} - 1$

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$

(b) Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (U_n - n)$

3 On pose $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} kV_k$,$n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k(V_k - 1)$

(b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $|S_n - \frac{n+1}{2n}| \leq \frac{1}{n}$

(c) En déduire que la suite (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$