Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1-U_n}{1+U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$; $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right)$

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie par $U_o = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2-3U_n+6}{U_n-1}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $3 \le U_n \le 4$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_{n+1} - 3 \le \frac{1}{2}(U_n - 3)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n - 3 \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) On admet que $\forall n \ge 4$ on a : $2^n \ge n^2$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = n(U_n - 3)$

a) Montrer que $\forall n \ge 4$ on a : $V_n \le \frac{1}{n}$

b) Déterminer alors la limite de la suite V.

Exercice 3

Soit U une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{1+U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{2n}$.

a) Montrer que $V_{n+1} = \frac{2(1+V_n)}{3+V_n}$.

b) Montrer par récurrence que $V_n \ge 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que V est une suite décroissante.

d) En déduire que V est convergente et calculer sa limite.

3) Déterminer $\lim\limits_{n+\infty} U_n$.

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{-1+U_n}{2+U_n}$.

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique.

b) Retrouver $\lim_{n+\infty} U_n$.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0\,,1]$ on a : $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

d) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 5

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{2U_n}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{2U_n-2}{2U_n-1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 6

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{U_n-8}{2U_n-9}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite réelle (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{U_n-1}{U_n-4}$

a) Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique te.

b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-1| \leq \frac{1}{7}|U_n - 1|$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

c) Retrouver la limite de la suite (U_n).

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n+1}{2}}$

1) Dans cette question on suppose que $U_0 = \cos x$ où $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

b) En déduire la limite de la suite (U_n).

2) Dans cette question on suppose que $U_0 \in]0, 1[$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \cos x$

Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \cos(U_n) \end{cases}$

a) Montrer pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(U_n)$

a) Montrer pour tout entier naturel n, $S_n = U_{n+1}$

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} S_n$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{U_n}{2}\right)$

a) Montrer, en utilisant la formule d'Euler que $\forall \theta \in \mathbb{R}$: $\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1+\cos\theta}{2}$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} nV_n$

Exercice 9

1) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 3$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$.

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \dfrac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} W_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ puis Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 10

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{1 + (U_n)^2}{2U_n}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

2) a) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (U_n)

4) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 11

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$ $\forall n \in IN.$

1) a) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $0 \leq U_n \leq 4$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - U_n)$.

(On pourra commencer par exprimer $4 - U_{n+1}$ en fonction de $4 - U_n$)

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $4 - U_n \leq 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} U_k$

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite (S_n) n'est pas majorée.

c) Déterminer alors la limite de la suite (S_n).

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n \geq 4n - 12\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) b)

b) Retrouver alors la limite de la suite (S_n).

Exercice 12

Soit f une fonction impaire, définie, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

* La droite d'équation $y = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

* Le point de coordonnées $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ est un point de C_f.

1) Déterminer $f(-1)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

2) On considère la fonction g définie sur $]-\infty, -1[$ par : $g(x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

a) Déterminer (0) , $g(-1)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x)$.

b) Montrer que g est continue sur $]-\infty, -1[$

c) Montrer que g est strictement croissante sur $]-\infty, -1[$

3) Soient h la restriction de g à l'intervalle $[-1, 0]$ et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Montrer que l'équation $h(x) = \frac{1}{x+n}$ admet dans $]-1, 0[$ une unique solution α_n.

b) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ définie par $\beta_n = \alpha_n + n$ est strictement croissante.

c) En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ est strictement décroissante puis qu'elle est convergente.

d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = -1$

Exercice 13

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{1 \times 1!}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2 \times 2!}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) \quad \text{et} \quad V_n = \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) U_n$$

1) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \times \left(\frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - n^2 - 1\right) U_n$

b) En déduire que la suite (V_n) est décroissante.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n - U_n \leq \frac{4}{n}$

4) En déduire que les (U_n) et (V_n) converge vers un même réel L et que $\frac{5}{2} \leq L \leq \frac{25}{8}$

Exercice 14

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 0$; $V_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}$ et $V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$

1) Calculer U_1 et V_1

2) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

5) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$

a) Montrer que (W_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 15

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_1 = 1$, $U_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 8U_n$

Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

1) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $2 < W_n < 4$

c) Montrer que la suite w est croissante

d) Montrer que la suite w est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit la suite réelle t définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \frac{W_n - 4}{W_n - 2}$

a) Montrer que t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

c) En déduire que $U_n = 2^{n-2}(1 + 2^{n-1})$

d) Déterminer la limite de la suite U.

Exercice 16

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \alpha U_n + (1-\alpha)V_n \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = (1-\alpha)U_n + \alpha V_n \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1) Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = V_n - U_n$

a) Calculer t_0 et t_1

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $t_n = 2(2\alpha - 1)^n$

c) En déduire la limite de la suite (t_n)

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

c) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite β.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n + V_n = 3$

e) En déduire la valeur de β

Exercice 17

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définie sur $\mathbb{N}$ deux suites réelles U et V

par : $\begin{cases} U_0 = a & V_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n+V_n} & et \quad V_{n+1} = \frac{U_n+V_n}{2} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$

2) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.

3) Montrer que les suites U et V sont convergentes

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

c) En déduire que les suites U et V sont adjacentes et qu'elles ont la même limite L.

5) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_nV_n = ab$.

b) En déduire la valeur de L.

Exercice 18

1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $1 - x \leq f(x) \leq 1$

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{2n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$

b) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{n+k}\right)$

a) Justifier que tout $n \in \mathbb{N}^*$et $1 \leq k \leq n$, on a : $1 - \frac{1}{n+k} \leq f\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq 1$

b) En déduire que $1 - U_n \leq W_n \leq 1$

c) Déterminer alors la limite de la suite (W_n).

Exercice 19

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite U est croissante.

3) Montrer que la suite U diverge vers $+\infty$.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $4 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 4 + 2(U_{n+1} - U_n)$

b) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $4n \leq U_n^2 - 1 \leq 4n + 2U_n - 2$

c) Montrer alors que pour tout entier naturel n on a : $1 - \frac{2}{U_n} + \frac{1}{U_n^2} \leq \frac{4n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}}{U_n}\right)$

Exercice 20

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$: $U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$. Retrouver la limite la suite (U_n)

Exercice 21

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Montrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 3$

c) Calculer la limite de la suite (U_n).

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver la limite de (U_n).

3) On considère la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{3}{U_n}$ et pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} W_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left[\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)\right]$

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 22

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n}}$: $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $\in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n}$; $\in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $V_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} V_n$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 1$; $V_n \geq \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$

c) puis déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

3) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{{V_k}^2}$; $n \geq 1$

a) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{{V_k}^2} \leq \frac{45}{2}\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$

b) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 23

A) Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite U est monotone.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2) Soient les suites V et S définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - U_n$ et $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5} V_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

d) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$

3) Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{1-U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_{n+1} = (W_n)^2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

4) **a)** Calculer en fonvtion de n la somme $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 2^k$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $P_n = W_0 \times W_1 \times \ldots \times W_n$

Exprimer P_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{P_n}{W_{n+1}}\right)$

B) Soit (S'_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S'_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{2^{n+1}}\left(2^{n+1}U_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} 2^k U_k\right)$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^{n} 2^k U_k < 2^{n+1}U_{n+1}$

2) a) Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

b) En utilisant la question **1) b)**, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n < 2$

c) En déduire que la suite (S'_n) est convergente.

3) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{2^{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{2^n}{U_n} = 2^n U_n$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S'_n = \frac{2}{U_{n+1}} - \frac{5}{2^{n+1}}$

c) Calculer alors la limite de la suite (S'_n).

Exercice 24

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).

Exercice 25

1) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1}{k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)$

b) Soit $U_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

2) Soit $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que la suite (V_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_{2n} - V_n \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.