Suites réelles 3ème Mathématiques

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n < 3$

2) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente

3) Soit la suite (V_n) définie sur ℕ par : $V_n = \frac{1}{U_n-3}$ Montrer que la suite (V_n) est arithmétique..

4) Calculer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ V_{n+1} en fonction de U_n

b) Montrer alors que la suite (V_n) est arithmétique.

5) a) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} V_k$

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n-1}{U_n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est minorée par 1.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3) Soit la suite (V_n) définie sur ℕ par : $V_n = \frac{3U_n-2}{U_n-1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison..

b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

c) Calculer alors la limite de (U_n).

4) a) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

b) Déterminer l'entier naturel n tel que $S_n = 39$

5) Soit la suite (W_n) définie sur ℕ par : $W_n = \frac{1}{U_n-1}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n + 3 = V_n$

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k - 1}$

Exercice 3

Soit (U_n) la suite définie sur ℕ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 1 + \frac{1}{3-U_n} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \leq 2$

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n-2)^2}{3-U_n}$ et en déduire que la suite (U_n) est croissante.

3) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{1}{U_n-2}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique de raison $r = -1$

b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que : $U_n = \frac{2n+1}{n+1}$

c) Calculer alors la limite de la suite (U_n)

4) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k - 2}$

a) Calculer S_n en fonction de n

b) Déterminer l'entier naturel n tel que $S_n = -36$

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $-3 \leq U_n \leq 1$.

b) Etudier les variations de la suite (U_n).

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\forall n \in \mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} V_n$

c) Exprimer V_n en fonction de n

3) Calculer $\sum_{k=0}^{n} V_k$

4) Exprimer U_n en fonction de n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

5) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $\frac{-4}{U_n+3} + 1 = V_n$

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{-4}{U_k + 3}$

Exercice 5

Soit (U_n) une suite géométrique de raison $q \in]0\,,1[$ et telle que $U_0 \times U_1 \times U_2 = 27$

1) Montrer que $U_1 = 3$

2) Déterminer q sachant que U_0 , U_1 et $U_2 - \frac{1}{4}$ sont trois termes consecutifs d'une suite arithmetique

3) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$

Exercice 6

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{4U_n+3}{U_n+6}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in IN$ on a : $-3 < U_n < 1$

2) Etudier les variations de la suite (U_n)

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Calculer V_n en fonction de n.

c) En déduire U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

5) Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

a) Montrer que $S_n = \frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} - 1\right)$

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$

Exercice 7

On donne ci-contre le tableau de variation d'une fonction g définie sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ par $g(x) = \frac{ax^2 + 4x + b}{(x-1)^2}$ où a et b sont deux reels. La courbe C_g de g coupe l'axe $(O, \vec{j})$ en un point $A(0, 3)$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g(x)$	-2	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-2

1) a) Calculer $\lim_{x \to +\infty} g(x)$

b) Déterminer alors les réels a et b

c) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ on a : $g(x) < 0$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x^2 - 3x}{x - 1}$ et soit C_f sa courbe représentative

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \{1\}$ on a : $f'(x) = -g(x)$

b) Dresser le tableau de variation de f

3) a) Montrer que la droite Δ: $y = 2x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$ et $-\infty$

b) Etudier la position relative de Δ et C_f

c) Montrer que le point $B(1, 1)$ est un centre de symétrie de C_f

d) Tracer C_f et Δ

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 3$

b) Vérifier que $U_1 > U_2$

c) Montrer alors par récurrence la suite (U_n) est croissante

Exercice 8

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = cos^2\alpha$ et $U_{n+1} = \sqrt{{U_n}^2 + cos^2\alpha}$ avec $\alpha \in [0, \pi] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

On pose pour tout $n \in IN \quad V_n = {U_n}^2$

1) Déterminer α pour que $U_1 = \sqrt{2}$

2) Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme

3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

4) Déterminer α pour que $U_2 = \frac{3}{4}$

Exercice 9

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

2) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| = \frac{|U_n - 1|}{-2U_n + 9}$

b) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{7}|U_n - 1|$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq 4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 10

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 3| = \frac{|U_n - 3|}{3 + \sqrt{U_n + 6}}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 11

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$; $U_1 = 3$ et $U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_2 et U_3

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (V_n).

3) On considère la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) En déduire U_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 12

Soit la fonction f définie sur $]-\infty\,,2[$ par $f(x) = \frac{2x-1}{-x+2}$ et soit C_f sa représentation graphique dans un RON $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$

1) a) Calculer $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter les résultats graphiquement

b) Dresser le tableau de variation f

2) a) Etudier la position relative de C_f et la droite $\Delta: y = x$

b) Tracer Δ et C_f (unité graphique 4 cm)

c) Montrer que $\forall x \in [-1\,,1]$ on a $f(x) \in [-1\,,1]$

d) Montrer que $\forall x \in [-1\,,1]$ on a $f(x) \leq x$

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $-1 < U_n < 1$

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n)

c) Représenter les quatre premiers termes de la suite (U_n) et conjecturer sa limite.

.4) a) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1-U_n}{1+U_n}$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont-on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim_{n\to+\infty} U_n$

5) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ et déduire $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+U_k}$

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{3x}$

La courbe de f et la droite $\Delta: y = x$ sont tracées ci-dessous

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \alpha \in [1,3] \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases}$

1) a) Pour quelle valeur de α la suite (U_n) est-elle constante ?

b) Dans la suite on fixe $U_0 = 1$

Représenter les quatre premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses.

c) Que peut-on conjecturer sur la limite de (U_n) ?

2) a) Montrer que pour tout $n \in IN$, $U_n \in [0\,,3]$.

b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = 3 - U_n$

a) Vérifier que $V_{n+1} = \sqrt{3}\,\frac{3-U_n}{\sqrt{U_n}+\sqrt{3}}$

b) Montrer que pour tout $n \in IN$, $V_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} V_n$

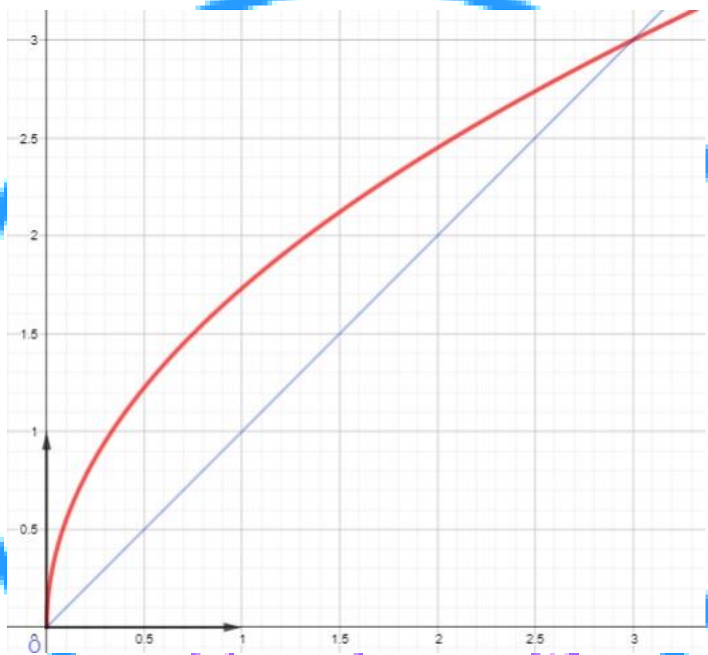
c) Déduire que pour tout $n \in IN$, $V_n \leq 2\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n$

d) Calculer alors la limite de la suite (U_n)

4) Pour $n \in IN^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ et $w_n = \frac{S_n}{n^2}$

a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, $S_n \geq 3n + (2+2\sqrt{3})\left(\left(\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^n - 1\right)$

b) En déduire alors que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n \geq 3$.



Exercice 14

I/ Soit la suite (T_n) définie sur IN par $T_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4}+4}$ et $\forall n \in IN$ $T_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}T_n^{\;2} + 2}$

On donne la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = T_n^{\;2} - 4$

1) a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

b) Exprimer V_n puis T_n en fonction de n

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente

d) Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n$

2) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} {T_k}^2$

II/ On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n de IN, on a : $0 \leq U_n \leq 1$

2) a) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$

b) Montrer alors, par récurrence, que pour tout n de IN on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire $\lim_{n \to +\infty} U_n$

4) a) Montrer, par récurrence, que pour tout n de IN on a : $U_n = cos(V_n)$

b) Calculer U_1 et en déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{8}$

Exercice 15

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$; $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}{U_n}^2 + 1}$

1) a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $0 \leq U_n \leq \sqrt{2}$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = {U_n}^2 - 2$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (V_n).

3) Calculer $S_n = \sum_{0}^{n} {U_k}^2 + 3k$

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_0 = 0$ et $\forall n \in IN$ on a : $W_{n+1} = \frac{1}{2}W_n + V_n$

et soit la suite (T_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $T_n = 2^n \times W_n$

a) Montrer que la suite (T_n) est une suite arithmétique de raison $r = -4$

b) Exprimer T_n puis W_n en fonction de n

c) Etudier les variations de la suite (W_n) pour $n \in IN^*$

5) On pose $\forall n \in IN$; $S_n = \sum_{2}^{n-1} 2^k \times W_k$

a) Calculer S_n en fonction de n

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$