Exercice 1

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n < 3$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

4) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ V_{n+1} en fonction de U_n

b) Montrer alors que la suite (V_n) est arithmétique.

5) a) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

b) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

Exercice 2

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 3U_n + 8 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 4$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer la limite de la suite (V_n)

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

d) Calculer la limite de la suite (U_n)

3) a) Calculer $S_{n+1} = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) Calculer $T_{n+1} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = V_n + 3n - 3 - 3^n$

Calculer $P_{n+1} = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n$

Exercice 3

Soit les suites réelles (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{5^n}{3}$ et $V_n = \frac{2^{2n+1}}{5}$

1) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont deux suites géométriques dont on précisera la raison et le premier terme

2) Pour tout entier naturel on pose $S_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{25}{3} + \frac{125}{3} + \cdots + \frac{5^n}{3}$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Déterminer n pour que $S_n = 19531$

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 8^n U_n - 2 \times 5^n V_n$

Montrer que la suite (W_n) est une suite arithmétique dont on précisera la raison

Exercice 4

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{7}|U_n - 1|$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

c) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 5

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$

3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

4) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{3U_n - 2}{U_n - 1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

c) Calculer alors la limite de (U_n)

5) a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} V_k$

6) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{1}{U_n - 1}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n + 3 = V_n$

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k - 1}$

Exercice 6

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{U_n+4} \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $(1 - U_{n+1}) - \frac{2}{3}(1 - U_n) = \frac{2({U_n}^2 - 1)}{3(U_n+4)}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|1 - U_{n+1}| \leq \frac{2}{3}|1 - U_n|$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|1 - U_{n+1}| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n)

Exercice 7

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 2U_n + 2 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 2$

a) Calculer V_1 et V_2

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 2.

c) Calculer V_n puis U_n en fonction de n.

3) a) Calculer $S_{n+1} = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) Calculer $T_{n+1} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

Exercice 8

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}{U_n}^2 + 1} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 < U_n < \sqrt{2}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) Soit la suite V_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = {U_n}^2 - 2$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 9

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n - 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Vérifier que la suite (U_n).est arithmétique

c) Donner le terme général de la suite (U_n).

d) Calculer $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = (\sqrt{2})^{U_n}$

a) Calculer V_0 et V_1

b) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

c) Exprimer V_n en fonction de n

3) On pose pour tout $n \in IN$ $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) Montrer que pour tout $n \in IN$ on a : $P_n = (\sqrt{2})^{1-n^2}$

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $]-6\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{4x+3}{x+6}$

1) **a)** Etudier les variations de f.

b) Tracer dans un repère orthonormé (unité : cm) la courbe de f et la droite $\Delta: y = x$

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n+3}{U_n+6} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) **a)** Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

3) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-3 < U_n < 1$

4) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Calculer V_n en fonction de n.

c) En déduire U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

5) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $]-2\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+2}1$

1) **a)** Etudier les variations de f.

b) Tracer dans un repère orthonormé (unité : cm) la courbe de f et la droite $\Delta: y = x$

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3

b) Quelle conjecture peut-on formuler quant au sens de variation de la suite (U_n) et de sa limite.

3) **a)** Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

4) Soit la suite V_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1+U_n}{U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $= 2$.

b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

5) *Calculer* $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ *et* $S'_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k}$

Exercice 12

Soit U et V les suites définies sur IN par $U_0 = 1$, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + n - 1$ et $V_n = U_n - 2n + 6$

1) Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique

2) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme

3) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

4) a) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) Calculer $S'_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

c) Calculer $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$

Exercice 13

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}\sqrt{U_n^{\,2} + 12}$ pour tout $n \in IN$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n > 0$ Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n^{\,2} - 4$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$

b) Exprimer V_n en fonction de , en déduire l'expression de U_n en fonction de n

3) a) Calculer $S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) En déduire $S' = U_0^{\,2} + U_1^{\,2} + U_2^{\,2} + \cdots + U_n^{\,2}$

Exercice 14

1) Soit la suite réelle (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = \frac{n+3}{2n+1}$

a) Montrer que la suite (t_n) est majorée par 3

b) Montrer que la suite (t_n) est décroissante

c) Calculer la limite de la suite (t_n)

2) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer U_1 et U_2

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 2$

3) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $2 - \frac{1}{2^n} \leq U_n \leq 2$

b) En déduire la limite de la suite réelle (U_n).

4) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - 2$

a) Calculer V_0 et V_1

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

d) Calculer les limites des suites réelles (V_n) et (U_n).

Exercice 15

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ *par* : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2} & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN, on a : $0 \leq u_n \leq 1$

2) Montrer que (u_n) est une suite croissante.

3) Soit la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

4) Soit la suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = w_n + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul $w_n = \sum_{k=0}^{n-1} v_k$

b) En deduire que $w_n = \dfrac{3}{2}\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^n - 1\right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

c) Calculer alors la limite de la suite (w_n)

Exercice 16

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_n = \dfrac{1}{2^n}$

1) a) Montrer que la suite U est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Calculer la limite de la suite U.

2) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ *par* : $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{1}{2}V_n + \dfrac{1}{2} & n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $V_n > 1$

b) Montrer, que pour tout entier naturel n on a : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(1 - V_n)$.

c) Déduire alors le sens de variation de la suite V.

3) a) Montrer, que pour tout entier naturel n on a : $V_n = 1 + U_n$

b) En déduire la limite de la suite V.