Exercice 1

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{9}{6-U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n < 3$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

4) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$

a) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$ V_{n+1} en fonction de U_n

b) Montrer alors que la suite (V_n) est arithmétique.

5) a) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} V_k$

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = \frac{1}{2^n}$

1) a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Calculer la limite de la suite (U_n).

2) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + \frac{1}{2}$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n > 1$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(1 - V_n)$

c) Déduire alors le sens de variation de la suite (V_n).

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n = 1 + U_n$

b) En déduire la limite de la suite (V_n).

Exercice 3

Soit la suite réelle (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $t_n = \frac{n+3}{2n+1}$

1) Montrer que la suite (t_n) est majorée par 3

2) Montrer que la suite (t_n) est décroissante

3) Calculer la limite de la suite (t_n)

Exercice 4

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$

3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

4) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{3U_n - 2}{U_n - 1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite arithmétique préciser son premier terme et sa raison.

b) Exprimer V_n en fonction de n et en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

c) Calculer alors la limite de (U_n)

5) a) Calculer $\sum_{k=0}^{n} V_k$

6) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{1}{U_n - 1}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n + 3 = V_n$

b) Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k - 1}$

Exercice 5

1) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer U_1 et U_2

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 2$

2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $2 - \frac{1}{2^n} \leq U_n \leq 2$

c) En déduire la limite de la suite réelle (U_n).

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - 2$

a) Calculer V_0 et V_1

b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

d) Calculer les limites des suites réelles (V_n) et (U_n).

Exercice 6

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$

c) Calculer U_n en fonction de n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

d) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} V_k$

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{-4}{U_n+3}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n + 1 = V_n$

b) Calculer $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{-4}{U_k+3}$

Exercice 7

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 3U_n + 8 \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 4$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) a) Calculer $S_{n+1} = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) Calculer $T_{n+1} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = V_n + 3n - 3 - 3^n$

Calculer $P_{n+1} = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n$

Exercice 8

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n+3}{U_n+6} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-3 < U_n < 1$

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

b) Calculer V_n en fonction de n.

c) En déduire U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

5) Soit $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} V_k$

a) Montrer que $S_n = \frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} - 1\right)$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{x+2}$

1) a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

   b) Tracer dans un repère orthonormé (unité : cm) la courbe de f et la droite $\Delta: y=x$

2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

   a) Représenter sur l'axe des abscisses les termes U_0 ; U_1 ; U_2 et U_3

   b) Quelle conjecture peut-on formuler quant au sens de variation de la suite (U_n) et de sa limite.

3) a) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $0\leq U_n\leq 1$

   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

4) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n=\frac{1+U_n}{U_n}$

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $=2$.

   b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

5) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $V_n-1=\frac{1}{U_n}$

   b) Calculer $S_n=\sum_{k=0}^{n} V_k$ et $S'_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{U_k}$

Exercice 10

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=\sqrt{\frac{1}{2}U_n{}^2+1} \end{cases}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $1<U_n<\sqrt{2}$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) Soit la suite V_n définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n=U_n{}^2-2$

   a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

   b) Calculer V_n puis U_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (U_n).

Exercice 11

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=\frac{3U_n+2}{U_n+4} \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

   b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $0\leq U_n\leq 1$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

4) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $(1-U_{n+1})-\frac{2}{3}(1-U_n)=\frac{2(U_n{}^2-1)}{3(U_n+4)}$

5) a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $|1-U_{n+1}|=\frac{2|1-U_n|}{U_n+4}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|1-U_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|1-U_n|$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|1-U_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d) Déterminer la limite de la suite (U_n)

Exercice 12

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{4} \\ U_{n+1} = U_n(2-U_n) \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2

2) a) Montrer par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_n = 1 - U_n$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} = {V_n}^2$

b) Montrer par récurrence, que $V_n = \left(\frac{3}{4}\right)^{2^n}$

. c) En déduire l'expression de U_n en fonction de n

Exercice 13

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$; $U_1 = 3$ et $U_{n+2} = \frac{3}{2}U_{n+1} - \frac{1}{2}U_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_2 et U_3

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_{n+1} - U_n$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme V_0

b) Exprimer V_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (V_n).

3) On considère la somme $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$

a) Exprimer S_n en fonction de n

b) En déduire U_n en fonction de n puis calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 14

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \leq 1$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

2) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$

a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et calculer la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| = \frac{|U_n - 1|}{-2U_n + 9}$

b) Montrer alors que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{7}|U_n - 1|$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq 4 \times \left(\frac{1}{7}\right)^n$.

d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 15

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{U_n + 6} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 3| = \frac{|U_n - 3|}{3 + \sqrt{U_n + 6}}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{1}{3}|U_n - 3|$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

d) Déterminer alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 16

I/ Soit la suite (T_n) définie sur IN par $T_0 = \sqrt{\frac{\pi}{4} + 4}$ et $\forall n \in IN \ T_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}{T_n}^2 + 2}$

On donne la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = {T_n}^2 - 4$

1) a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ puis calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

b) Exprimer V_n puis T_n en fonction de n

c) Calculer : $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n$

2) Calculer $S_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} {T_k}^2$

II/ On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout n de IN, on a : $0 \leq U_n \leq 1$

2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

3) a) Montrer que pour tout n de IN, on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|u_n - 1|$

b) Montrer alors, par récurrence, que pour tout n de IN on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4) a) Montrer, par récurrence, que pour tout n de IN on a : $U_n = \cos(V_n)$

b) Calculer U_1 et en déduire la valeur de exacte de $\cos\frac{\pi}{8}$