SUITES REELLES 4^{eme} Mathématiques

Exercice 1

1) Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases} \quad \forall n \in IN$

a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $0 < U_n < 3$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$.

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3) Soit la suite (W_n) définie sur IN par : $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$.

a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 2

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in IN.$

1) **a)** Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $0 \leq U_n \leq 4$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) **a)** Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - U_n)$. (On pourra commencer par exprimer $4 - U_{n+1}$ en fonction de $4 - U_n$

b) En déduire que $\forall n \in IN$ on a : $4 - U_n \leq 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3) On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite (S_n) n'est pas majorée.

c) Déterminer alors la limite de la suite (S_n).

4) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n \geq 4n - 12\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

(On pourra utiliser le résultat de la question **2) b)**

b) Retrouver alors la limite de la suite (S_n).

Exercice 3

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.

2) Montrer que la suite U est croissante.

3) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) **a)** Etudier le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction : $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$

c) Montrer que la suite U est convergente.

d) Déterminer la limite de la suite U.

2) Soit les suites V et S définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - U_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5} V_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

d) Déterminer alors : $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice 5

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n}}$: $n \in \mathbb{N}$.

1) **a)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n}$; $\in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $V_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} V_n$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 1$; $V_n \geq \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^{n-1}$ puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} V_n$

3) Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_k^{\,2}}$; $n \geq 1$

a) Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{V_k^{\,2}} \leq \frac{45}{2}\left(1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n\right)$

b) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 6

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$U_0 = 0$; $V_0 = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3}$ et $V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$

1) Calculer U_1 et V_1

2) Montrer, par récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

5) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$

a) Montrer que (W_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n).

Exercice 7

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n+1}{2}}$

1) Dans cette question on suppose que $U_0 = \cos x$ où $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$

b) En déduire la limite de la suite (U_n).

2) Dans cette question on suppose que $U_0 \in]0, 1[$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 8

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{3U_n-1}{2U_n}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{2U_n-2}{2U_n-1}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Retrouver la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 9

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_1 = 1$, $U_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 8U_n$

Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

1) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $2 < W_n < 4$

c) Montrer que la suite w est croissante

d) Montrer que la suite w est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit la suite réelle t définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \frac{W_n - 4}{W_n - 2}$

a) Montrer que t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$

c) En déduire que $U_n = 2^{n-2}(1 + 2^{n-1})$

d) Déterminer la limite de la suite U.

Exercice 10

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 1$.

2) Montrer que la suite U est croissante.

3) Montrer que la suite U diverge vers $+\infty$.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $4 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 4 + 2(U_{n+1} - U_n)$

b) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $4n \leq U_n^2 - 1 \leq 4n + 2U_n - 2$

c) Montrer alors que pour tout entier naturel n on a : $1 - \frac{2}{U_n} + \frac{1}{U_n^2} \leq \frac{4n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$

d) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}}{U_n}\right)$

Exercice 11

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

1) Montrer que la suite U est croissante.

2) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$

3) En déduire que la suite U n'est pas majorée.

4) Déterminer la limite de la suite U.

Exercice 12

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k}{3^k} = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} - \frac{3}{3^3} + \cdots + (-1)^n \frac{n}{3^n}$$

1) Montrer que la suite (U_{2n}) est décroissante.

2) Montrer que la suite (U_{2n+1}) est croissante.

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_{2n} > U_{2n+1}$

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} (U_{2n} - U_{2n+1})$.

4) Montrer que la suite (U_n) converge vers un réel α et que $U_3 < \alpha < U_2$

Exercice 13

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\mathrm{V_n} = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{V_n}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{V_k}$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).

Exercice 14

Soit la suite (U_n) définie par $U_o = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} = \frac{{U_n}^2-3U_n+6}{U_n-1}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $3 \leq U_n \leq 4$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3) On admet que $\forall n \geq 4$ on a : $2^n \geq n^2$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = n(U_n - 3)$

a) Montrer que $\forall n \geq 4$ on a : $V_n \leq \frac{1}{n}$

b) Déterminer alors la limite de la suite V.

Exercice 15

1) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1}{k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)$

b) Soit $U_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2) Soit $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que la suite (V_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$on a : $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 16

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définie sur $\mathbb{N}$ deux suites réelles U et V par

$$\begin{cases} U_0 = a & V_0 = b \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} & et \quad V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$

2) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.

3) Montrer que les suites U et V sont convergentes

4) **a**) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$

c) En déduire que les suites U et V sont adjacentes et qu'elles ont la même limite L.

5) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n V_n = ab$.

b) En déduire la valeur de L.

Exercice 17

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1 : U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_1 et U_2 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$

c) Retrouver la limite la suite (U_n)

Exercice 18

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + x^2)}$

1) **a)** Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0\,,1]$ on a : $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|U_n - 1|$

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$

d) Déterminer ***alors*** $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Exercice 19

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

1) **a)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite réelle (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$

a) Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{7}|U_n - 1|$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

c) Retrouver la limite de la suite (U_n).

Exercice 20

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{1 + (U_n)^2}{2U_n}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

2) a) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (U_n)

4) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$

b) Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 21

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ ona : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + (U_n)^2}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$.

b) Montrer que la suite , (U_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1 - U_n}{1 + U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n$ montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$

d) Calculer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right)$