SUITES GEOMETRIQUES $2^{\text{ème}}$ Sciences

Exercice 1

Soit (U_n) une suite géométrique définie sur $\mathbb{N}$ tel que $U_3 = 24$ et $U_8 = 768$

1) Décomposer 32 en produit de facteurs premiers.
2) a) Déterminer la raison q de cette suite.
   b) Déterminer le premier terme U_0 de cette suite
3) a) Exprimer U_n en fonction de n
   b) Calculer $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_8$

Exercice 2

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = 4U_n + 9$

1) a) Calculer U_1 , U_2 et U_3
   b) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) On pose pour tout entier naturel n, $V_n = U_n + 3$
   a) Montrer que $V_{n+1} = 4U_n + 12$
   b) En déduire que V est une suite géométrique de raison 4.
   c) Exprimer alors V_n puis U_n en fonction de n.
3) On pose $S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ et $S' = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$
   a) Montrer que $S = 4^n - 1$
   b) En déduire S'

Exercice 3

1) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
   a) Calculer U_1 et U_2
   b) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n - 2$
   a) Calculer V_0 et V_1
   b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
   c) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

Exercice 4

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 2U_n + 2$

1) a) Calculer U_1 et U_2
   b) Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.
2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 2$
   a) Calculer V_1 et V_2

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = 2V_n$

c) En déduire que la suite (V_n) est suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

3) a) Exprimer V_n en fonction de n

b) En déduire U_n en fonction de n3

4) a) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) En déduire $S = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

Exercice 5

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Calculer U_n en fonction de n

c) Calculer $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{-4}{U_n+3}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n + 1 = V_n$

c) Calculer $\frac{-4}{U_0+3} + \frac{-4}{U_1+3} + \frac{-4}{U_2+3} + \cdots + \frac{-4}{U_n+3}$

Exercice 6

1) Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{1 + 4U_n^2} \end{cases}$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n^2 + \frac{1}{3}$

a) Montrer que V est une suite géométrique de raison 4

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) a) Calculer $S = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) En déduire $S' = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2$

Exercice 7

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -3 \\ U_{n+1} = 3U_n + 8 \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n + 4$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

3) **a)** Calculer $S_{n+1} = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

b) Calculer $T_{n+1} = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = V_n + 3n - 3 - 3^n$

Calculer $P_{n+1} = W_0 + W_1 + W_2 + \cdots + W_n$

Exercice 8

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}U_n^2 + 2}$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$

1) Calculer U_1 et U_2

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = U_n^2 - 4$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison

b) Déterminer V_n en fonction de n et en déduire U_n, en fonction de n

c) Calculer la somme $S = U_0^2 + U_1^2 + \cdots + U_n^2$

3) Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} W_n = 4 \\ W_{n+1} - W_n = 4 \end{cases}$

Exprimer W_n en fonction de n

Exercice 9

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n}$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$

1) **a)** Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est pas arithmétique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n+1}{U_n}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{2n+2}$

3) On donne $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$

et $S' = (V_2^2 - V_1^2) + (V_4^2 - V_3^2) + \cdots + (V_{98}^2 - V_{97}^2) + (V_{100}^2 - V_{99}^2)$

a) Montrer que $S_n = n^2 + 4n$

b) Déterminer la valeur de n pour que $S_n = 10400$

c) Déduire que $S' = 20800$

Exercice 10

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n+3}{U_n+6} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1) **a)** Calculer U_1 et U_2

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Calculer V_n en fonction de n.

c) En déduire U_n en fonction de n.

3) Soit $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$

Montrer que $S_n = \frac{7}{4}\left(\left(\frac{3}{7}\right)^{n+1} - 1\right)$

Exercice 11

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_1 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{n-2}{n(n+1)(n+2)}$ pour tout $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_2 et U_3

b) En déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = U_n - \frac{2}{n(n+1)}$

a) Calculer V_1

b) Montrer que la suite (V_n)est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$

c) Déterminer V_n en fonction de n et en déduire U_n, en fonction de n

3) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

b) Calculer en fonction de n, $S_n = V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n$

c) En déduire que $S'_n = U_1 + U_2 + U_3 + \cdots + U_n$

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S'_n < 3$

Exercice 12

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{3} \\ U_{n+1} = \frac{3U_n}{1+2U_n} \end{cases}$

On suppose que pour tout entier naturel n, on a : $0 < U_n < 1$

1) a) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n(1-U_n)}{1+2U_n}$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_{n+1} > U_n$

2) soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1-U_n}{2U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$

b) Calculer V_0 puis exprimer V_n en fonction de n

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n = \frac{3^n}{2+3^n}$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + 2U_n = \frac{U_n - 1}{U_{n+1} - 1}$

b) En déduire que $(1 + 2U_0) \times (1 + 2U_1) \times (1 + 2U_2) \times \ldots \times (1 + 2U_n) = \frac{2}{3} + 3^n$