Douma Ali — 4ème Maths — 04/02/2024

Exercices sur les similitudes

Exercice N°1

Le plan est rapporté à un repère orthogonal direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ .On prendra $1cm$ pour unité graphique .On considère l'application f du plan dans lui même qui, à tout M d'affixe z ,associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i . En déduire le rapport et l'angle de f .

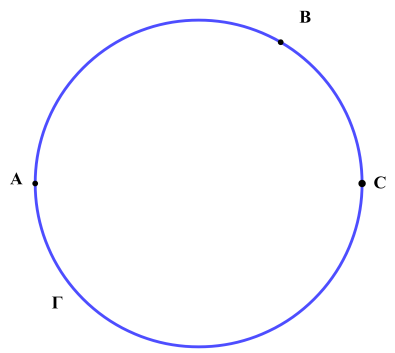
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$.
   Calculer ΩM_0 et donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.

3. On considère la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du point M_n
   - a) Placer les points Ω, M_1, M_2, M_3 et M_4
   - b) Montrer par récurrence ,pour tout entier naturel n ,l'égalité $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.
   - c) Pour tout entier naturel n , calculer ΩM_n puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4.
   - a) On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ ou x et y sont deux entiers relatifs .Après avoir vérifie que le couple $(-5, -3)$ est une solution , résoudre l'équation (E) .
   - b) Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $Im(z) = 1$ et $Re(z) \geq 0$. Caractériser géométriquement Δ et le représenter . Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartiennent à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Préciser son plus petit élément.

Exercice N°2

A et C sont deux points distincts du plan .
On note Γ le cercle de diamètre $[AC]$ et O le centre de Γ ;
B est un point du cercle Γ distincts des points A et C . Le points D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}[2\pi]$. Le point G est le centre de gravité du triangle BCD . Les droites (AB) et $CG)$ se coupent en M .



Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure précédente .
2. Montrer que les points O, Det G appartiennent à la médiatrice du segment $[BC]$ et que le point G est le milieu du segment $[CM]$.
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M

Partie B
Dans cette question ,le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes -1 et 1 .Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

1. Calculer l'affixe du point E puis placer E .
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{4}$. Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s .
3. Montrer que l'image E' du point E par σ a pour affixe $-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
et montrer que le point E' appartient au cercle Γ .
4. On note (C) le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
Montrer que le point E appartient à (C) .Soit O' l'image du point O par la similitude s.
Démontrer que le point O' est le centre de gravité du triangle ACE .
En déduire une construction de (C) .

Exercice N°3

Soit $ABCD$ un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I le centre du carré $ABCD$ et J le milieu du segment $[CD]$.
Soit s la similitude directe qui transforme A en I et B en J .Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s.Dans la **partie A** on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la **partie B** on utilisera les nombres complexes .

Partie A

1. Déterminer le rapport est l'angle de la similitude s.
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude .,Γ_1 est le cercle de diamètre $[AI]$, Γ_2 est le cercle de diamètre $[BJ]$ .Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2 .Placer Ω dans la figure .
3. Donner l'image par s de la droite (BC) .En déduire le point image par s du point C , puis le point K image par s du point I.
4. On pose $h = sos$(composée de s avec lui même .
   a. Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
   b. Trouver l'image du point A par h . En déduire que les points A, Ω et K sont alignés .

Partie B
Le plan complexe est rapporté à un repère $(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ orthogonal direct ,choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives $0, 2, 2+2i$ et $2i$

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitude s est $z' = \frac{1}{2}iz + 1 + i$
2. Calculer l'affixe du point I
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(E) = A$. Placer le point E .

Exercice N°4

Dans le plan orienté , on considère un triangle OAB direct et rectangle en O.
On désigne par J le milieu de $[AB]$ .M est un point variable de la droite (Δ) perpendiculaire en A à (AB) . La perpendiculaire en O à (OM) coupe (AB) en M' .

1. Soit s la similitude de centre O telle que $s(A) = B$.
   - a) Montrer que , pour tout point M de (Δ) , $s(M) = M'$.
   - b) En déduire que , lorsque M décrit (Δ) , le triangle OMM' est l'image d'un triangle fixe par une similitude que l'on précisera .
2.
   - a) Montrer que , pour tout point M de (Δ) , le point I milieu de $[MM']$ est l'image de M par une similitude S de centre O dont on précisera le rapport et l'angle .
   - b) Soit H le projet orthogonal de O sur (Δ).Déterminer $S(H)$.
   - c) Déterminer le lieu géométrique du point I lorsque M décrit (Δ)
3. Pour tout point M de (Δ) distinct de A , on désigne par P le point tel que $MAM'P$ est un rectangle .
   Déterminer le lieu géométrique du point P lorsque M décrit $\Delta)$ privé du point A

Exercice N°5

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
On désigne par S l'application du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - i$

1. Montrer que S est une similitude directe dont on donnera les éléments caractéristiques .
   On notera A le point invariant de S .Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MM'}\right)$, on supposant que MA .
2.
   - a) Construire M' pour un point M donné .
   - b) Déterminer la droite (D') image par S de la droite $(D) : y = x$ .Construire (D')
3.
   - a) Montrer qu'il existe un point B du plan distinct de A et un seul tel que les affixes z_0 de B et z_0' de $B' = S(B)$ soient liées par la relation $z_0 z_0' = 1$. Placer B et B' .
   - b) Soit A' le symétrique de A par rapport à O .
     Montrer que les points $A, A'B$ et B' sont cocycliques .