Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un réel de : $]0, \pi[$.

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectif CA, AB et BC et on désigne par I, J et K leurs centres respectifs. Soit D le symétrique de C par rapport à K.

Soit S_1 la similitude directe de centre C et qui transforme I en A.

Soit S_2 la similitude directe de centre B et qui transforme A en J.

1) Donner les rapports et les angles de S_1 et S_2.
2) Préciser les images de I et de B par $S_2 \circ S_1$.
3) En déduire que : $(IB) \perp (JK)$ et que $IB = JK$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $I = A * B$, la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ coupe $[BC]$ en J.

1) a) Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui transforme I en O et B en C.
   b) Déterminer le rapport et l'angle de f.
   c) Montrer que A est le centre de f.
   d) Donner la forme réduite de f.
2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   a) Montrer que : $R = S_{(AC)} \circ S_{(AJ)}$
   b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $\sigma = f \circ S_{(AJ)}$
3) On pose : $E = S_B(A)$ et on désigne par g la similitude indirecte qui transforme : I en D et D en E.
   a) Montrer que 2 est le rapport de g en déduire que g admet un centre.
   b) Déterminer $(g \circ g)(I)$. En déduire que A est le centre de g.
   c) Déterminer alors l'axe de g.

Exercice 3

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; $AB = 3$ et $BC = 4$

1) Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$
   a) Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Montrer que H est le centre de f.
2) Soit $D = f(C)$
   a) Montrer que D appartient à la droite (BH).
   b) Construire le point D.
3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C. On désigne par Ω le centre de g.

a) Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$

b) Soit $E = g(C)$. Déterminer $S_{(BC)}(E)$. Construire alors le point E.

c) Préciser la nature de $g \circ g$. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE)

d) Construire le point Ω et l'axe Δ de la similitude g.

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral direct ; on pose : $I = B * C$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme I en B et C en A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que le centre Ω de la similitude S appartient à ζ et à la droite (AI). Construire Ω.

2) Soit σ la similitude indirecte qui transforme I en B et C en A.

a) Déterminer et construire le point $B' = \sigma(B)$.

b) On désigne par $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à la droite (AB) en B. Montrer que le point $A' = \sigma(A)$ est le point d'intersection des droites (AC) et $\mathcal{D}$.

c) Déterminer le rapport de la similitude σ.

3) On désigne par ω le centre de σ et par Δ son axe.

a) Déterminer $(\sigma \circ \sigma)(I)$ et $(\sigma \circ \sigma)(C)$.

b) Déduire alors une construction du point ω

c) Montrer que $\Delta \perp (AC)$.

d) Déterminer et construire alors la droite Δ.

Exercice 5

Soit OAB un triangle tel que : $OA = 2OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. soit J et K les milieux respectifs des segments $[OA]$ et $[OB]$. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à B, I le symétrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).

A/ 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan tel que $R(A) = A'$ et $R(B) = I$.

b) Montrer que R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) On pose : $G = R(H)$.

a) Montrer que G appartient à la droite (IA') et que les droites (OG) et (IA') sont perpendiculaires.

b) Construire alors le point G.

B/ Soit S la similitude directe qui transforme O en A et B en O.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que H est le centre de S.

c) Montrer que $S(K) = J$, en déduire que les droites (HK) et (HJ) sont perpendiculaires.

2) La perpendiculaire en A à la droite (OA) coupe la droite (HK) en C.

a) Montrer que : $S\big((OA)\big) = (AC)$.

b) Déduire que : $S(J) = C$.

c) Montrer que : $HC = OA = AC$.

C/ Soit $h = S \circ R^{-1}$, on désigne par L le symétrique de O par rapport à I.

1) Déterminer : $h(I)$ et $h(O)$.

2) Montrer que h est une homothétie et préciser son rapport.

3) Déterminer son centre.

Exercice 6

Soit ABC un rectangle équilatéral direct de centre O. On désigne par A' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$ et par I le symétrique de C par rapport à O et par J le symétrique de B par rapport à O

1) Soit f la similitude directe qui transforme A en A' et C en B.

R est la rotation de centre O et qui transforme A en C.

h est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Déterminer l'angle de la rotation R

c) Montrer que $f = h \ o \ R$

d) Déterminer $f(B)$ et $f(I)$

2) Soit g la similitude indirecte qui transforme I en O et C en B. On désigne par Ω son centre.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Déterminer $(g \ o \ f^{-1})(O)$ et $(g \ o \ f^{-1})(B)$

c) Caractériser alors $g \ o \ f^{-1}$.

d) En déduire que $g(B) = A'$

3) a) Déterminer $(g \ o \ g)(C)$.

b) Déterminer et construire le point Ω.

c) Montrer que l'axe de g est la droite perpendiculaire à (BC) en Ω.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Construire son centre Ω.

2) a) Déterminer les images des droites (BD) et (BC) par S. En déduire que : $S(B) = A$.

b) Montrer que $S(A) = J$. Puis caractériser l'application : $S \circ S$.

c) Déterminer $(S \circ S)(B)$. En déduire que $\overrightarrow{\Omega B} + 4\overrightarrow{\Omega J} = \vec{0}$.

3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en O et C en I. Et soit $S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI).

a) Vérifier que : $\sigma = S_{(OI)} \circ S$.

b) Déterminer : $\sigma(B)$.

c) Déterminer les éléments caractéristique de la similitude σ.

Exercice 8

On considère un rectangle $ABCD$ de centre O tels que $AB = 2AD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soient $I = A * B$ et $J = D * C$. La perpendiculaire à (AC) passant par I coupe (DC) en E.

Soit S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

1) Déterminer le rapport et l'angle de S.

2) a) Déterminer $S\big((AC)\big)$ et $S\big((BC)\big)$.

b) En déduire $S(C)$.

c) Construire alors le point $F = S(D)$.

3) Soit Ω le centre de S.

a) Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$ montrer que $S \circ S = h$

b) Montrer que $S \circ S(A) = O$. En déduire que $\Omega \in (AO)$.

c) Soit $G = I * E$. Montrer que $S \circ S(I) = G$. En déduire que $\Omega \in (IG)$.

d) Construire Ω.

4) Soit σ la similitude indirecte d'axe Δ de centre Ω qui transforme I en A.

a) Déterminer le rapport de σ.

b) Construire l'axe Δ.

c) Soit le point K tel que $I = K * \Omega$. Montrer que Δ est la médiatrice du segment $[AK]$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et soit G sons centre de gravité, on désigne par D le symétrique de G par rapport à la droite (AC).

Soit S la similitude directe tel que $S(D) = A$ et $S(A) = B$.

1) a) Montrer que le rapport de S est $\sqrt{3}$ et que son angle est $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que $S(G) = C$.

2) Soit $J = D * G$, déterminer $S(J)$ et en déduire le centre de S.

3) On considère l'application $\varphi = S \circ S \circ S_{(AC)}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte dont-on précisera le rapport.

b) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(G)$.

c) En déduire le centre et l'axe de φ.

Exercice 10

On considère un triangle isocèle ABC de sommet principale A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Soit S la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1) a) Montrer que le rapport de S est $\sqrt{3}$.

   b) Préciser l'axe Δ de S.

2) Soit $B' = f(B)$.

   a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $S \circ S$.

   b) En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$.

   c) Montrer que $BB' = BC$

   d) En déduire que $S(I) = J$.

3) Soit $S = f \circ S_{(BC)}$. Déterminer la nature et les élèments caractéristiques de S.

Exercice 11

Soit ABC un triangle rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = 2\ AC$

1) Soit S une similitude directe qui transforme A en B et C en A

   a) Déterminer le rapport et l'angle de S

   b) Soit Ω le centre de S montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

   c) Construire le point $B' = S(B)$

Soit D et D' deux droites parallèles passant respectivement par C et B ne contenant aucune arête du triangle ABC. Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D' respectivement en J et I

   a) Déterminer $S(D)$ et $S(\Delta)$

   b) En déduire $S(I)$

3) Soit f une similitude indirecte tel que $f(A) = B$ et $f(C) = A$

   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ S^{-1}$

   b) Soit $f(B) = H$. Déterminer $S_{(AB)}(H)$ puis construire le point H

   c) Soit Ω' le centre de f. Montrer que $\Omega' \in (\mathrm{BC}) \cap (\mathrm{AH})$.

   d) Construire l'axe Δ de f.

4) Soit $L = A * B$. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(A\,,\overrightarrow{AL}\,,\overrightarrow{AC}\right)$

Soit g l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (cos^2\alpha + i\sin\alpha\cos\alpha)z + (sin^2\alpha - i\sin\alpha\cos\alpha)$ avec $\alpha \in [0\,,2\pi[$

   a) Déterminer α pour que g soit une similitude directe et non un déplacement.

   b) Déterminer selon α, le rapport, l'angle et le centre de g

Exercice 12

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. On considère les points , B et C d'affixes respectives : $1 + 2i$; $5 - 2i$ et -1

Soit f l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel

$z' = \frac{1}{2} i\,\overline{z} - 1 + \frac{1}{2} i$

1) a) Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.

b) Déterminer une équation cartésienne de son axe Δ

2) Soit g la similitude indirecte qui transforme O en C et A en B ; on pose $h = f\ o\ g$

a) Déterminer l'expression complexe de g

b) Montrer que $z' = (1+i)z - 1$ est l'expression complexe de l'application h

c) caractériser alors l'application h

Exercice 13

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. Soit φ l'application du plan vers lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -i\overline{z} + 2$.

1) a) Déterminer l'ensemble I des points invariants par φ.

b) Montrer que φ est une symétrie glissante.

c) On désigne par $\vec{u}$ son vecteur ; déterminer l'expression complexe associée à l'application $\varphi\ o\ \varphi$. En déduire l'affixe de $\vec{u}$.

d) On désigne par Δ son axe ; déterminer l'expression complexe associée à l'application $\varphi\ o\ t_{-\vec{u}}$. En déduire une équation cartésienne de Δ.

2) On désigne par A, B, M_1 et M_2 les points du plan d'affixes respectives : 1, i, $e^{i\alpha}$ et $-ie^{-i\alpha} + 2$

a) Montrer que lorsque α, le point M_1 varie sur un cercle fixe $\mathcal{C}$ que l'on déterminera.

b) Vérifier que $\varphi(B) = A$ et $\varphi(M_1) = M_2$

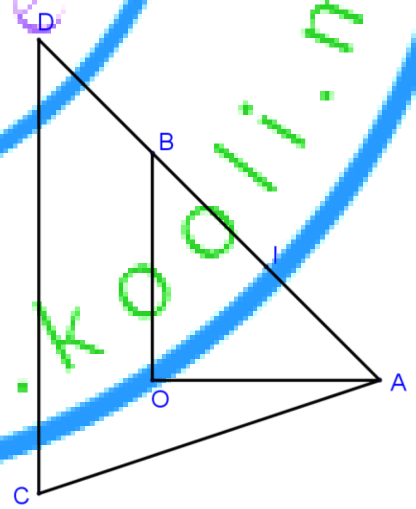
c) En déduire que lorsque α, le point M_2 varie sur un cercle fixe $\mathcal{C}$' que l'on déterminera.

Exercice 14

Dans la figure ci-contre OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que $OA = OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.



1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) a) Montrer que le point O est l'orthocentre du triangle ACD.

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AC).

Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude directe f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D

a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire que $g(O) = C$.

b) Déterminer les images des points C et D par $g \circ f^{-1}$. Caractériser l'application $g \circ f^{-1}$.

4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$

a) Déterminer les images des points J et I' par : $g \circ f^{-1}$

b) En déduire que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

Exercice 15

Soit P un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Soit f l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \sqrt{2}\, i\, \bar{z} - \sqrt{2}\, i$

a) Montrer que f est une similitude indirecte et préciser son rapport et l'affixe de son centre Ω .

b) Déterminer une équation cartésienne de son axe Δ .

2) Soit g l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -i\, \bar{z} + 3$.

a) Montrer que g est un antidéplacement.

b) Soit M'' d'affixe z'' l'image de M par $g \circ g$, exprimer z'' en fonction de z .

c) En déduire que g est une symétrique glissante et préciser l'affixe de son vecteur.

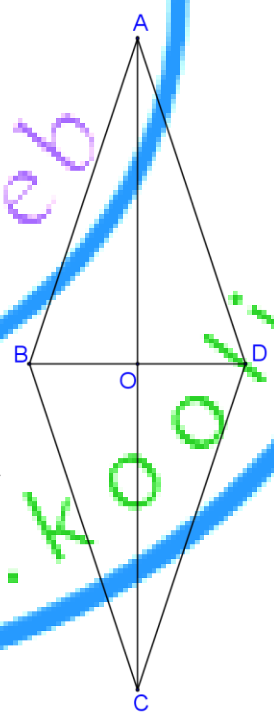
3) Soit l'application h de P vers luis même qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe le point M' de coordonnées (x', y') telle que : $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$.

a) On désigne par z l'affixe de M et par z' l'affixe de M' exprimer z' en fonction de z.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

Exercice 16

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AC = 3\, BD$



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) a) Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que $OA = 9\, OD'$.

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que $BB'DD'$ est un losange.

3) Soit $g = f \circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), $(B'D)$ et (CD) respectivement en M, N, P et Q.

Montrer que $MQ = 3\, NP$.

Exercice 17

On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[JC]$.

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que $f(K) = L$.

c) Soit H le milieu du segment $[AJ]$. Justifier que $f(I) = H$.

3) On muni le plan du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I, K, J et H.

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

d) Déduire alors que $\varphi = f \circ S_{(IK)}$.(où f est la similitude directe définie dans 2* et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ.

a) Tracer Δ.

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.

Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

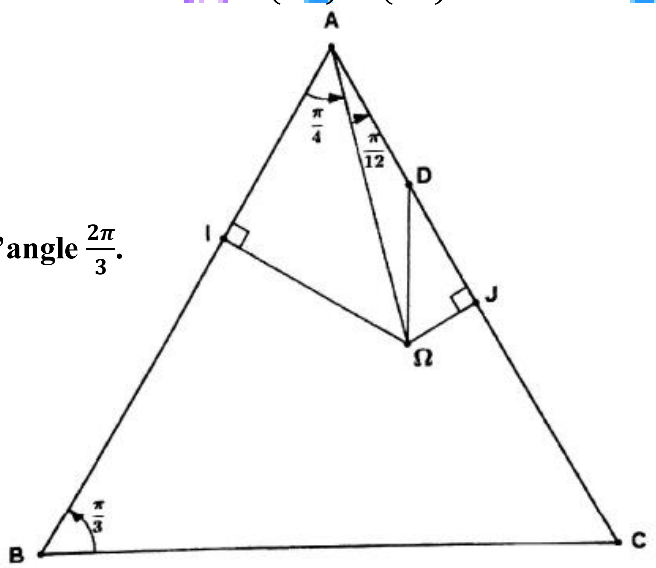
Exercice 18

Le plan est orienté. Dans la figure ci-dessous ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC)

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$



1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$

a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F = R(J)$. Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$. On pose $f = h \circ R$

a) Vérifier que $f(J) = I$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$ **On donne** $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

En déduire que le rapport de f est $1+\sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J)=I$.

a) Montrer que $g = f \circ S_{(\Omega J)}$

b) Déterminer le rapport de .

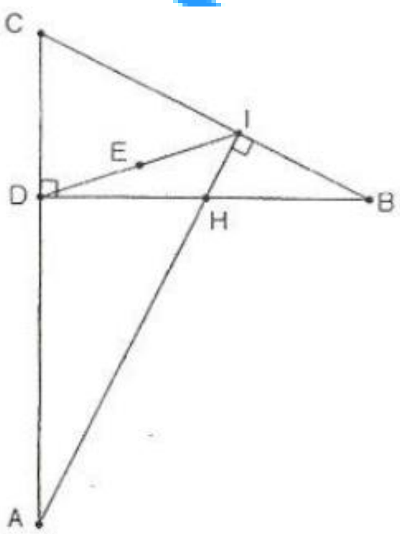
c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD).

. d) Montrer que $g = h \circ S_{(\Omega D)}$

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.

Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Exercice 19



Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

¤ DBC est un triangle rectangle en D tel que

$\left(\widehat{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $DB = 2\,DC$

¤ le point H est le milieu du segment $[DB]$

¤ le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droit (BC)

¤ le point E est le milieu du segment $[ID]$

¤ les droites (IH) et (CD) se coupent au point A

1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Calculer $\tan \widehat{CBD}$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$

b) Montrer alors que $R(I) = E$

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \circ R$

a) Déterminer $f(H)$

b) Montrer que $f(I) = I$

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que $f(C) = A$

3) a) La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre $[BH]$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF)

c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω. Montrer que $f(J) = F$

b) Montrer que $f(F) = \Omega$

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.