Similitudes 4eme Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

Soit ABC un triangle tel que la mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un réel de : $]0, \pi[$.

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectif CA, AB et BC et on désigne par I , J et K leurs centres respectifs. Soit C' le symétrique de C par rapport à K.

Soit S_1 la similitude directe de centre C et qui transforme I en A.

Soit S_2 la similitude directe de centre B et qui transforme A en J.

1) Donner les rapports et les angles de S_1 et S_2.

2) Préciser les images de I et de B par $S_2 \text{o} S_1$.

3) En déduire que : $(IB) \perp (JK)$ et que $IB = JK$

Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $I = A * B$, la bissectrice intérieure de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ coupe $[BC]$ en J.

1) **a)** Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui transforme I en O et B en C.

b) Déterminer le rapport et l'angle de f.

c) Montrer que A est le centre de f.

d) Donner la forme réduite de f.

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que : $R = S_{(AC)} \text{ o } S_{(AJ)}$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'application : $\sigma = f \text{ o } S_{(AJ)}$

3) On pose : $E = S_B(A)$ et on désigne par g la similitude indirecte qui transforme : I en D et D en E.

a) Montrer que 2 est le rapport de g en déduire que g admet un centre.

b) Déterminer $(g \text{ o } g)(I)$. En déduire que A est le centre de g.

c) Déterminer alors l'axe de g.

Exercice 3*

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$; $AB = 3$ et $BC = 4$

1) Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC). Montrer que H est le centre de f.

2) Soit $D = f(C)$

a) Montrer que D apparient à la droite (BH).

b) Construire le point D.

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C. On désigne par Ω le centre de g.

a) Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$

b) Soit $E = g(C)$. Déterminer $S_{(BC)}(E)$. Construire alors le point E.

c) Préciser la nature de $g \circ g$. Montrer que Ω appartient à la droite (AC) ainsi qu'à la droite (BE)

d) Construire le point Ω et l'axe Δ de la similitude g.

Exercice 4

Soit ABC un triangle équilatéral direct ; on pose : $I = B * C$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme I en B et C en A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que le centre Ω de la similitude S appartient à ζ et à la droite (AI). Construire Ω.

2) Soit σ la similitude indirecte qui transforme I en B et C en A.

a) Déterminer et construire le point $B' = \sigma(B)$.

b) On désigne par $\mathcal{D}$ la droite perpendiculaire à la droite (AB) en B. Montrer que le point $A' = \sigma(A)$ est le point d'intersection des droites (AC) et $\mathcal{D}$.

c) Déterminer le rapport de la similitude σ.

3) On désigne par ω le centre de σ et par Δ son axe.

a) Déterminer $(\sigma \circ \sigma)(I)$ et $(\sigma \circ \sigma)(C)$.

b) Déduire alors une construction du point ω

c) Montrer que $\Delta \perp (AC)$.

d) Déterminer et construire alors la droite Δ.

Exercice 5

Soit OAB un triangle tel que : $OA = 2OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. soit J et K les milieux respectifs des segments $[OA]$ et $[OB]$. On désigne par A' le symétrique de O par rapport à B, I le symétrique de J par rapport à O et H le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).

A/ 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan tel que $R(A) = A'$ et $R(B) = I$.

b) Montrer que R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) On pose : $G = R(H)$.

a) Montrer que G appartient à la droite (IA') et que les droites (OG) et (IA') sont perpendiculaires.

b) Construire alors le point G.

B/ Soit S la similitude directe qui transforme O en A et B en O.

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Montrer que H est le centre de S.

c) Montrer que $S(K) = J$, en déduire que les droites (HK) et (HJ) sont perpendiculaires.

2) La perpendiculaire en A à la droite (OA) coupe la droite (HK) en C.

a) Montrer que : $S\big((OA)\big) = (AC)$.

b) Déduire que : $S(J) = C$.

c) Montrer que : $HC = OA = AC$.

C/ Soit $h = S \text{ o } R^{-1}$, on désigne par L le symétrique de O par rapport à I.

1) Déterminer : $h(I)$ et $h(O)$.

2) Montrer que h est une homothétie et préciser son rapport.

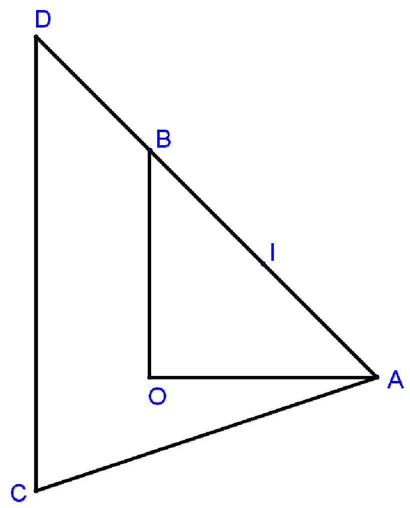
3) Déterminer son centre.

Exercice 6*

Dans la figure ci-contre OAB est un triangle rectangle et isocèle tel que $OA = OB$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques respectifs du point I par rapport à O et à B.

Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C.



1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$

2) **a)** Montrer que le point O est l'orthocentre du triangle ACD.

b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur la droite (AC).

Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f et en déduire que J est le centre de la similitude directe f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D

a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire que $g(O) = C$.

b) Déterminer les images des points C et D par $g \text{ o } f^{-1}$. Caractériser l'application $g \text{ o } f^{-1}$.

4) Soit $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$

a) Déterminer les images des points J et I' par : $g \text{ o } f^{-1}$

b) En déduire que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.

Exercice 7

Soit ABC un rectangle équilatéral direct de centre O. On désigne par A' et C' les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AB]$ et par I le symétrique de C par rapport à O et par J le symétrique de B par rapport à O

1) Soit f la similitude directe qui transforme A en A' et C en B.

R est la rotation de centre O et qui transforme A en C.

h est l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$

a) Déterminer le rapport et l'angle de f

b) Déterminer l'angle de la rotation R

c) Montrer que $f = h \text{ o } R$

d) Déterminer $f(B)$ et $f(I)$

2) Soit g la similitude indirecte qui transforme I en O et C en B. On désigne par Ω son centre.

a) Déterminer le rapport de g.

b) Déterminer $(g\ o\ f^{-1})(O)$ et $(g\ o\ f^{-1})(B)$

c) Caractériser alors $g\ o\ f^{-1}$.

d) En déduire que $g(B) = A'$

3) **a)** Déterminer $(g\ o\ g)(C)$.

b) Déterminer et construire le point Ω.

c) Montrer que l'axe de g est la droite perpendiculaire à (BC) en Ω.

Exercice 8*

On considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[AC]$ et $[JC]$.

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f.

b) Justifier que $f(K) = L$.

c) Soit H le milieu du segment $[AJ]$. Justifier que $f(I) = H$.

3) On muni le plan du repère orthonormé direct $\left(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}\right)$.

Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I, K, J et H.

c) Déterminer $\varphi(I)$ et $\varphi(J)$.

d) Déduire alors que $\varphi = f\ o\ S_{(IK)}$.(où f est la similitude directe définie dans 2* et $S_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ.

a) Tracer Δ.

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.

Montrer que $\varphi(P) = f(P)$ et en déduire que $\varphi(P) = Q$.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que :$\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.

1) Soit S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Construire son centre Ω.

2) **a)** Déterminer les images des droites (BD) et (BC) par S. En déduire que : $S(B) = A$.

b) Montrer que $S(A) = J$.

c) Caractériser l'application : S o S.

d) Déterminer $(S \text{ o } S)(B)$. En déduire que $\overrightarrow{\Omega B} + 4\overrightarrow{\Omega J} = \vec{0}$.

3) Soit σ la similitude indirecte qui transforme D en O et C en I. Et soit $S_{(OI)}$ la symétrie orthogonale d'axe (OI).

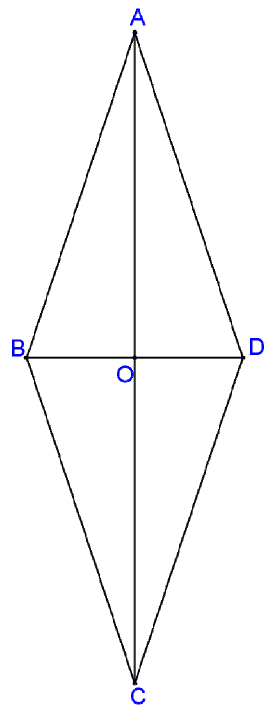
a) Vérifier que : $\sigma = S_{(OI)} \circ S$.

b) Déterminer : $\sigma(B)$.

c) Déterminer les éléments caractéristique de la similitude σ.

Exercice 10* SP 2014

Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et $AC = 3\ BD$



1) Soit f la similitude directe qui envoie A en B et C en D.

a) Déterminer le rapport et l'angle de f.

b) Montrer que O est le centre de f.

2) **a)** Soit D' l'image de D par f. Montrer que D' est l'orthocentre du triangle ABD et que $OA = 9\ OD'$.

b) Soit B' l'image de B par f. Montrer que $BB'DD'$ est un losange.

3) Soit $g = f\ o\ S_{(AC)}$.

a) Déterminer la nature de g.

b) Déterminer les images des points O, A, B, C et D par g.

c) Déterminer l'axe Δ de g.

d) La droite Δ coupe les droites (AB), (BD'), $(B'D)$ et (CD) respectivement en M, N, P et Q. Montrer que $MQ = 3\ NP$.

Exercice 11

On considère un rectangle $ABCD$ de centre O tels que $AB = 2AD$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soient $I = A * B$ et $J = D * C$. La perpendiculaire à (AC) passant par I coupe (DC) en E. Soit S la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

1) Déterminer le rapport et l'angle de S.

2) **a)** Déterminer $S\big((AC)\big)$ et $S\big((BC)\big)$.

b) En déduire $S(C)$.

c) Construire alors le point $F = S(D)$.

3) Soit Ω le centre de S.

a) Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\frac{1}{4}$ montrer que $S \text{ o } S = h$

b) Montrer que $S \text{ o } S(A) = O$. En déduire que $\Omega \in (AO)$.

c) Soit $G = I * E$. Montrer que $S \text{ o } S(I) = G$. En déduire que $\Omega \in (IG)$.

d) Construire Ω.

4) Soit σ la similitude indirecte d'axe Δ de centre Ω qui transforme I en A.

a) Déterminer le rapport de σ.

b) Construire l'axe Δ.

c) Soit le point K tel que $I = K * \Omega$. Montrer que Δ est la médiatrice du segment $[AK]$.

Exercice 12

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et soit G sons centre de gravité, on désigne par D le symétrique de G par rapport à la droite (AC).

Soit S la similitude directe tel que $S(D) = A$ et $S(A) = B$.

1) **a)** Montrer que le rapport de S est $\sqrt{3}$ et que son angle est $\frac{\pi}{2}$

b) Montrer que $S(G) = C$.

2) Soit $J = D * G$, déterminer $S(J)$ et en déduire le centre de S.

3) On considère l'application $\varphi = S \text{ o } S \text{ o } S_{(AC)}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte dont-on précisera le rapport.

b) Déterminer $\varphi(J)$ et $\varphi(G)$.

c) En déduire le centre et l'axe de φ.

Exercice 13

On considère un triangle isocèle ABC de sommet principale A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu de $[BC]$ et par J le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Soit S la similitude indirecte de centre C qui transforme A en B.

1) **a)** Montrer que le rapport de S est $\sqrt{3}$.

b) Préciser l'axe Δ de S.

2) Soit $B' = f(B)$.

a) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de $S \text{ o } S$.

b) En déduire que $\overrightarrow{CB'} = 3\overrightarrow{CA}$.

c) Montrer que $BB' = BC$

d) En déduire que $S(I) = J$.

3) Soit $S = f \text{ o } S_{(BC)}$. Déterminer la nature et les élèments caractéristiques de S.

Exercice 14

Soit ABC un triangle rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = 2\ AC$

1) Soit S une similitude directe qui transforme A en B et C en A

a) Déterminer le rapport et l'angle de S

b) Soit Ω le centre de S montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

c) Construire le point $B' = S(B)$

Soit D et D' deux droites parallèles passant respectivement par C et B ne contenant aucune arête du triangle ABC. Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D' respectivement en J et I

a) Déterminer $S(D)$ et $S(\Delta)$

b) En déduire $S(I)$

3) Soit f une similitude indirecte tel que $f(A) = B$ et $f(C) = A$

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $f \circ S^{-1}$

b) Soit $f(B) = H$. Déterminer $S_{(AB)}(H)$ puis construire le point H

c) Soit Ω' le centre de f. Montrer que $\Omega' \in (BC) \cap (AH)$.

d) Construire l'axe Δ de f.

4) Soit $L = A * B$. Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AC}\right)$

Soit g l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (cos^2\alpha + i\sin\alpha\cos\alpha)z + (sin^2\alpha - i\sin\alpha\cos\alpha)$ avec $\alpha \in [0, 2\pi[$

a) Déterminer α pour que g soit une similitude directe et non un déplacement.

b) Déterminer selon α, le rapport, l'angle et le centre de g

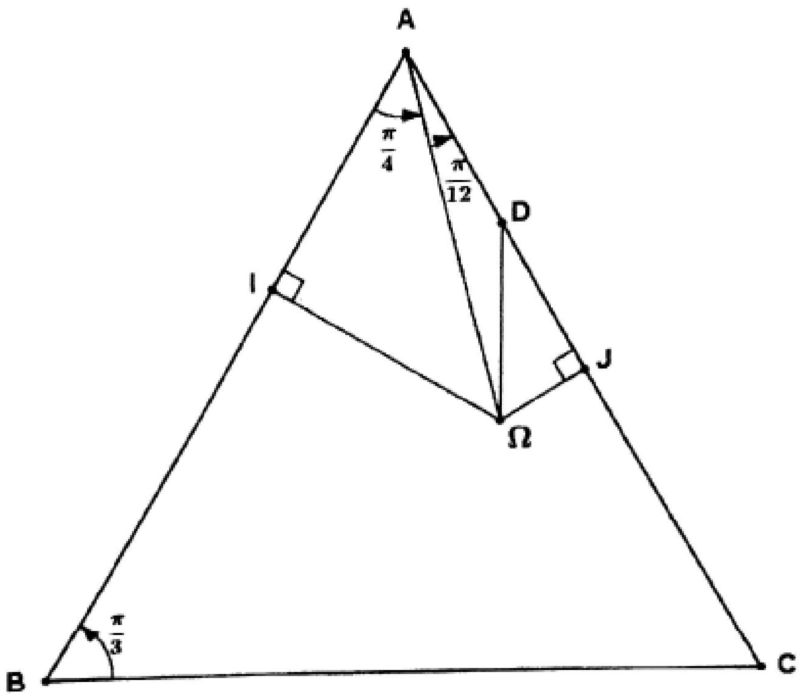
Exercice 15*

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Ω est un point intérieur au triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

I et J sont les projetés orthogonaux de Ω respectivement sur les droites (AB) et (AC)

D est le point de la droite (AC) tel que $DA = D\Omega$



1) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

2) Soit $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$

a) Justifier que R est la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b) Soit $F = R(J)$. Montrer que F est un point de la demi-droite $[\Omega I)$. Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre Ω et telle que $h(F) = I$. On pose $f = h \circ R$

a) Vérifier que $f(J) = I$.

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer $\frac{\Omega I}{\Omega A}$ et $\frac{\Omega A}{\Omega J}$ **On donne** $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

En déduire que le rapport de f est $1+\sqrt{3}$.

4) Soit g la similitude indirecte de centre Ω telle que $g(J) = I$.

a) Montrer que $g = f \text{ o } S_{(\Omega J)}$

b) Déterminer le rapport de .

c) Montrer que l'axe de g est la droite (ΩD).

. **d)** Montrer que $g = h \text{ o } S_{(\Omega D)}$

e) La droite (ΩD) coupe la droite (BC) en un point K. On pose $K' = g(K)$.

Vérifier que $h(K) = K'$. Construire alors le point K'.

Exercice 16

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points , B et C d'affixes respectives : $1+2i$; $5-2i$ et -1

Soit f l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel

$z' = \frac{1}{2}i\,\bar{z} - 1 + \frac{1}{2}i$

1) **a)** Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport et le centre.

b) Déterminer une équation cartésienne de son axe Δ

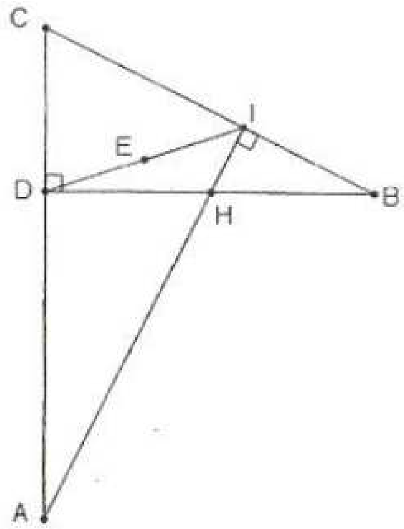
2) Soit g la similitude indirecte qui transforme O en C et A en B ; on pose $h = f \text{ o } g$

a) Déterminer l'expression complexe de g

b) Montrer que $z' = (1+i)z - 1$ est l'expression complexe de l'application h

c) caractériser alors l'application h

Exercice 17*



Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

¤ DBC est un triangle rectangle en D tel que

$(\widehat{\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et $DB = 2\,DC$

¤ le point H est le milieu du segment $[DB]$

¤ le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droit (BC)

¤ le point E est le milieu du segment $[ID]$

¤ les droites (IH) et (CD) se coupent au point A

1) Soit R la rotation de centre H et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Calculer $\tan\widehat{CBD}$. En déduire que $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$

b) Montrer alors que $R(I) = E$

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose $f = h \text{ o } R$

a) Déterminer $f(H)$

b) Montrer que $f(I) = I$

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que $f(C) = A$

3) **a)** La droite (CH) coupe la droite (AB) en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre $[BH]$.

En déduire que $\left(\widehat{\overrightarrow{IH},\overrightarrow{IF}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

b) Montrer alors que l'image par f de la droite (ID) est la droite (IF)

c) La droite (ID) coupe les droites (CF) et (AB) respectivement en J et Ω. Montrer que $f(J) = F$

b) Montrer que $f(F) = \Omega$

4) Montrer que le triangle $CA\Omega$ est rectangle.

Exercice 18

Soit P un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$.

1) Soit f l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \sqrt{2}\, i\, \bar{z} - \sqrt{2}\, i$

a) Montrer que f est une similitude indirecte et préciser son rapport et l'affixe de son centre Ω .

b) Déterminer une équation cartésienne de son axe Δ .

2) Soit g l'application de P vers luis même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = -i\, \bar{z} + 3$.

a) Montrer que g est un antidéplacement.

b) Soit M'' d'affixe z'' l'image de M par $g \circ g$, exprimer z'' en fonction de z .

c) En déduire que g est une symétrique glissante et préciser l'affixe de son vecteur.

3) Soit l'application h de P vers luis même qui à tout point M de coordonnées $(x\,,y)$ associe le point M' de coordonnées $(x'\,,y')$ telle que : $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y + 1 \end{cases}$.

a) On désigne par z l'affixe de M et par z' l'affixe de M' exprimer z' en fonction de z.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$. Soit φ l'application du plan vers lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -i\bar{z} + 2$.

1) **a)** Déterminer l'ensemble I des points invariants par φ.

b) Montrer que φ est une symétrie glissante.

c) On désigne par $\vec{u}$ son vecteur ; déterminer l'expression complexe associée à l'application $\varphi\ o\ \varphi$. En déduire l'affixe de $\vec{u}$.

d) On désigne par Δ son axe ; déterminer l'expression complexe associée à l'application $\varphi\ o\ t_{-\vec{u}}$. En déduire une équation cartésienne de Δ.