Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

On considère un parallélogramme $ABCD$ de sens direct.

1) **Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{IA},\overrightarrow{ID}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et le triangle DCE rectangle isocèle en D tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DE}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.**

2) **Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$**

   a) **Quelle est l'image de A par R ?**

   b) **Montrer que $R(B) = E$.**

3) **Soit A' le symétrique de A par rapport à I.**

   a) **Justifier que $A' = R(D)$.**

   b) **Montrer que $A'E = BD$ et que les droites $(A'E)$ et (BD) sont perpendiculaires.**

Exercice 2

On considère un triangle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $AB < AC$. On désigne par ζ le cercle circonscrit à ce triangle et par O son centre.

1) **Faire une figure.**

2) **Soit l'ensemble $E = \left\{M \in P / \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$.**

   a) **Vérifier que $A \in E$ puis déterminer et construire l'ensemble E.**

   b) **Déterminer et construire le point I du plan tel que $IB = IC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$.**

3) **Soit P le point du segment $[AC]$ tel que $CP = AB$.**

   a) **Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Quel est son angle ?**

   b) **Déterminer le centre de la rotation R.**

4) **Donner la nature du triangle IAP et en déduire que $AC = AI + AB$.**

5) **Soit M un point variable de l'ensemble E et G le centre de gravité du triangle MBC. Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point G lorsque M décrit E.**

Exercice 3

On considère un carré $ABCD$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit $r = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

1) **Préciser les images par r des droites (AB) et (BC).**

2) **Soit le point P tel que $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. La droite (AP) coupe (CD) en Q. La perpendiculaire à (AP) menée par A coupe (BC) en K et (CD) en S.**

   a) **Préciser les images par r des droites (AP) et (AK)**

b) **Montrer que** $r(K) = Q$ **et** $r(P) = S$

c) Soient les points I et J milieux respectifs des segments $[KP]$ et $[QS]$.

Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle.

3) Montrer que les droites (PS) et (QK) sont perpendiculaires.

Exercice 4

On considère un triangle ABC de sens direct. BAB' et ACC' deux triangles rectangles et isocèles en A et de sens direct.

1) En utilisant la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ montrer que : $BC' = B'C$ et que $(BC') \perp (B'C)$.

2) a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_2 qui transforme B en C et C' en B'.

b) Déterminer son angle θ et construire son centre J.

3) Soit $E = B * C'$ et $F = C * B'$.

a) Déterminer $r_1(F)$ et $r_2(E)$.

b) En déduire que $AFJE$ est un carré.

Exercice 5

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ on désigne par I le milieu de $[BC]$ et par Δ la droite perpendiculaire à (BC) et passant par C et on désigne par K le point d'intersection de Δ et (AB) et on désigne par J le milieu $[KC]$.

1) Faire un figure

2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a) Déterminer : $R(B)$, $R\big((AC)\big)$ et $R\big((BC)\big)$.

b) Déduire $R(C)$ et $R(I)$.

3) On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC.

Déterminer l'image ζ' du cercle ζ par la rotation R puis déterminer $\zeta \cap \zeta'$.

4) Soit M un point du plan tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{5\pi}{4}\ [2\pi]$.

a) Déterminer l'ensemble des points M.

b) On pose : $M' = R(M)$, déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie.

c) Montrer que $(BM) \perp (CM')$ et que $IM = JM'$.

Exercice 6

On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O tel que $AB \neq AD$, $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. Soit E le point du plan tel que CED est un triangle équilatéral direct.

1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = E$ et $R(B) = D$.

b) Déterminer son angle θ et construire son centre I.

2) La droite (EC) coupe (AB) en F.

a) Montrer que $D \in [AE]$.

b) Montrer que le triangle AFE est équilatéral direct.

c) Montrer que $R(F) = A$.

d) En déduire que I est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle AEF.

3) Soit R' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

a) Déterminer $R'(D)$ et $R'(F)$.

b) En déduire que les droites (FD) et (BE) sont sécantes en un point J.

c) Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{JD}, \overrightarrow{JB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$.

4) On désigne par ζ' le cercle circonscrit au triangle ABD.

Montrer que le cercle ζ' passe par I et J.

Exercice 7

Soit ABC un triangle équilatéral direct et soit O son centre de gravité. Soient M un point du segment $[AB]\backslash\{A, B\}$ et N un point du segment $[BC]$ tel que $AM = BN$.

1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en B et M en N.

b) Préciser l'angle de R.

2) a) Montrer que le point C est l'image de B par R.

b) En déduire le centre de R.

3) Soit P l'image de N par R.

a) Montrer que $P \in [AC]$.

b) Montrer que le triangle MNP est équilatéral de centre de gravité O.

4) Montrer que le cercle ζ circonscrit au triangle MAP passe par O.

Exercice 8

On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

1) a) Faire une figure

b) Montrer que $R(D) = A$ et $R(C) = D$

c) Déterminer la nature et les élément caractéristiques de $R \circ R$.

d) En déduire que $R(A) = B$.

2) Soit M un point du segment $[AD]$ distinct de A et D. La perpendiculaire à la droite (MC) passant par D coupe le segment $[AB]$ en un point N.

a) Déterminer les images du segment $[AD]$ et de la droite (MC) par la rotation R.

b) En déduire que $R(M) = N$.

c) En déduire que $CM = DN$ et que $(CM) \perp (DN)$.

3) Soit ζ le cercle de centre O et passant par A ; la demi-droite $[CM)$ recoupe le cercle ζ en E. Soit F le point de la demi-droite $[DN)$ tel que $DF = CE$.

a) Montrer que $R(E) = F$.

b) Déterminer l'image de ζ par R.

c) En déduire l'ensemble des points F lorsque M varie sur le segment $[AD]$.

Exercice 9

On considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$. Soit I le milieu de $[BC]$ et soit le point J tel que B est le milieu de $[JC]$.

Soit la rotation R_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la rotation R_2 de centre B et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$

1) Faire une figure.

2) Soit A' et B' les images respectifs des points A et B par l'application $R_1 \circ R_2$.

Montrer que I est le milieu de $[AA']$ et que B est le milieu de $[AB']$.

3) Soit M un point du plan, on pose $M_1 = R_1(M) \quad M_2 = R_2(M)$.

En précisant la nature de $R_1 \circ {R_2}^{-1}$. Montrer que pour tout point M du plan, I est le milieu $[M_1M_2]$.

4) Montrer que l'application $R_1 \circ R_2$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

Exercice 10

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.

Soit f l'application qui à tout point $M(x, y)$ du plan associe le point $M'(x', y')$ du plan tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{\sqrt{3}-2}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1+2\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que f est une isométrie du plan.

2) Montrer que le point $\Omega(x, y)$ est l'unique point invariant par f.

3) Soit les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ tel que $f(M) = M'$.

a) Exprimer en fonction de x et y, $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{\Omega M'}$ et $det\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$.

b) En déduire la mesure principale de l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right)$.

c) Quelle est alors la nature de f.