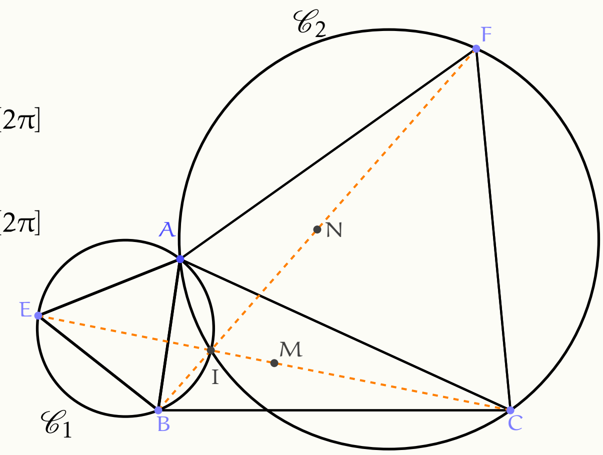
Série 12 : Rotation
3 ème Maths 2019-2020

Exercice 1

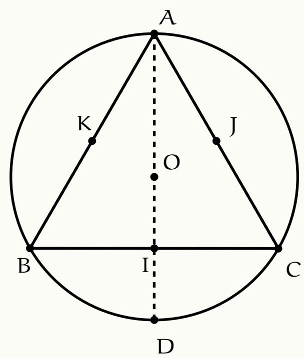
Le plan est orienté dans le sens direct.
ABC étant un triangle direct .
AEB est un triangle équilatéral tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
et $\mathcal{C}_1$ son cercle circonscrit.
ACF est un triangle équilatéral tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$
et $\mathcal{C}_2$ son cercle circonscrit.
Les droites (EC) et (BF) se coupent en un point I.



1. En utilisant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$, démontrer que :
$$CE = BF \text{ et que } \left(\widehat{\overrightarrow{EC}, \overrightarrow{BF}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi].$$
2. Démontrer que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ passent par le point I.
3. Soit M le milieu de [EC] et N le milieu de [BF].
   a. Démontrer que le triangle AMN est équilatéral direct.
   b. Démontrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IN}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}}\right) [2\pi]$.

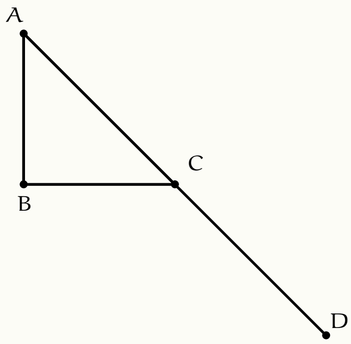
Exercice 2

Dans un plan rapporté P, on considère un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB].
On désigne par D le point de $\mathscr{C}$ diamétralement opposé à A.



1. Soit R la rotation qui transforme A en B et J en K.
   a. Déterminer le centre et une mesure de l'angle de R.
   b. Déterminer les images de K et de I par R.
2. Soit R′ la rotation de centre D et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.
   a. Montrer que $R'(B) = C$.
   b. Soit A′ l'image de A par R′. Montrer que A′ est le symétrique de A par rapport à C.
3. Soit M un point du plan P distinct de A. On pose $M' = R'^{-1}(M)$ et $M'' = R(M)$; R'^{-1} étant la réciproque de R′. Montrer que $\overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{BA}$.

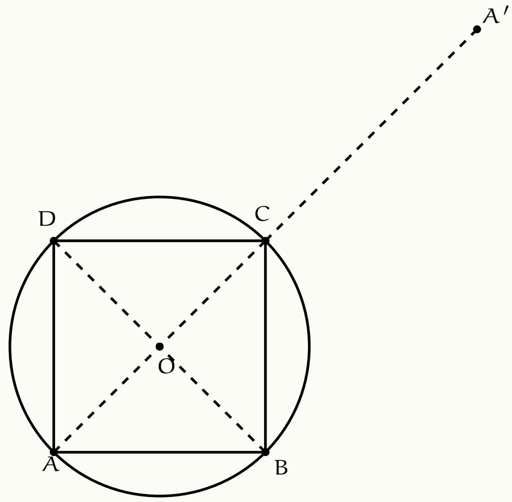
Exercice 3



Dans un plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle rectangle en B tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On désigne par D le symétrique de A par rapport à C.
Soit R la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ transformant A en D.

1. Construire le centre Ω de R.
2. Montrer que Ω est le symétrique de A par rapport à B.
3. Déterminer, le point I, image de B par R.
4. On désigne par C' le symétrique de C par rapport à I.
   Soit M un point de la demi-droite [BC) distinct de B et M' le point de la demi-droite $[IC')$ tel que :$BM = IM'$. Montrer $R(M) = M'$.

Exercice 4



Le plan orienté dans le sens direct.
On considère un carré ABCD inscrit dans un cercle $\mathscr{C}$ tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

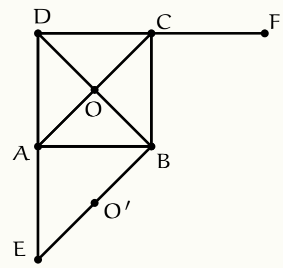
I) 1. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   a. Soit $E = R(D)$.
      Montrer que E est le symétrique de D par rapport à A.
   b. Soit F le symétrique de D par rapport à C.
      Déterminer $R(F)$.
   c. Soit M un point de la demi-droite [CB) distinct de C et B etN le point de la demi-droite [AB) tel que $CM = AN$. Montrer que $R(M) = N$.

2. SoitA' le symétrique de A par rapport à C et R' la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme A en A'.
   Construire le centre K de R'. Montrer que K est le symétrique de A par rapport à B.

II) 1. Déterminer et construire l'ensemble $\Gamma = \left\{M \in P \text{ tel que } \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MD}}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]\right\}$.

2. Soit R'' la rotation d'angle $\frac{3\pi}{4}$ qui transforme A en D et on désigne par Ω le centre de R'' .
   a. Vérifier que $\Omega \in \Gamma$ puis construire Ω.
   b. Soit $B' = R''(B)$. Montrer que D, B et B sont alignés.
   c. Soit $D' = R''(D)$. Donner une mesure de $\left(\overrightarrow{DD'}, \overrightarrow{DA}\right)$ puis montrer que (DD') est tangente à $\mathscr{C}$.
   d. Montrer que le triangle $\Omega D'B'$ est rectangle.
   e. Montrer que $[B'\Omega)$ est la bissectrice de $D'\widehat{B}D$.

Exercice 5

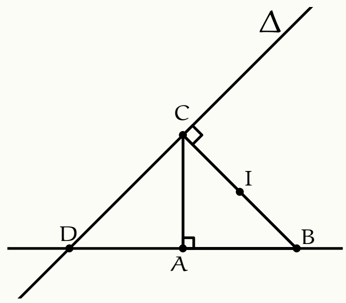


Dans un plan orienté P, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit R la rotation de centre B et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Déterminer l'image de C par R.
   b) Soit E le symétrique de D par rapport à A. Montrer que E est l'image de D par R.
   c) Soit F le symétrique de D par rapport à C. Déterminer l'image de F par R.
2. On désigne par O' le milieu de $[BE]$.
   Montrer que $OF = O'D$ et que O est l'orthocentre du triangle DFO'.

Exercice 6



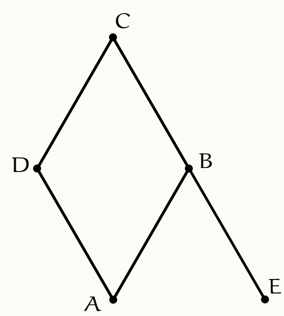
Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On désigne par I le milieu de $[CB]$ et par Δ la droite perpendiculaire à (BC) passant par C et qui coupe (AB) en D.

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1. a) Déterminer $R(B)$.
   b) Déterminer les images des droites (AC) et (BC) par R.
   c) En déduire $R(C)$.
2. Caractériser $R \circ R$ et en déduire que A est le milieu de $[BD]$.
3. Déterminer et construire le point J, image de I par R.
4. Soit M un point du plan distinct de A et B tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
   a) Déterminer et construire l'ensemble des points M.
   b) On pose $M' = R(M)$; déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie.
   c) Montrer que $(BM) \perp (CM')$ et que $BM = CM'$.

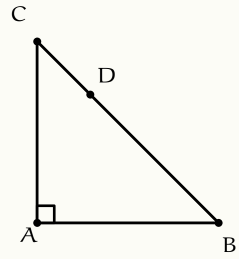
Exercice 7



Dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ et E est le symétrique de C par rapport à B.

1. a) Montrer qu'il existe une unique rotation r telle que $r(B) = D$ et $r(E) = B$.
   b) Déterminer l'angle de la rotation r.
   c) Montrer que A est le centre de r.
2. Soit I le milieu de $[BE]$ et J son image par r. Montrer que A ; J et C sont alignés.
3. Soit H le projeté orthogonal de I sur (AB). La parallèle à (BD) passant par H coupe (AD) en K.
   a) Montrer que $r(H) = K$.
   b) Montrer que les droites (KJ) et (AD) sont perpendiculaires.

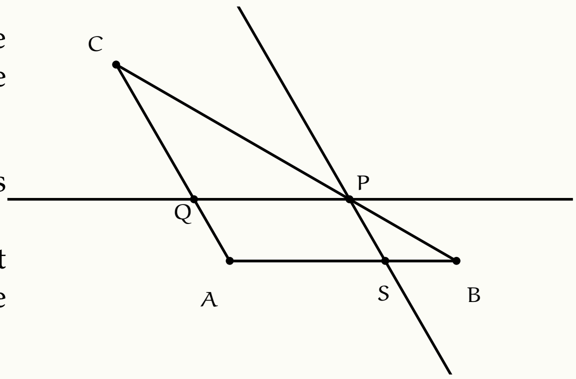
Exercice 8



Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
On désigne par D un point du segment [BC] tel que $BD = AB$.

1. a. Montrer qu'il existe une unique rotation r qui transforme A en B et B en D.
   b. Déterminer le centre I et l'angle de la rotation r.
2. a. Donner les éléments caractéristique de $r \circ r$.
   b. En déduire la nature du triangle AID.
3. a. construire le point D' image de D par r.
   b. Quelle est l'image de la droite (AB) par ror ?
   c. Montrer que $ACDD'$ est un parallélogramme.
4. a. Montrer que les points A, B, D et D' sont sur un même cercle Γ que l'on précisera.
   b. Le cercle Γ est-il globalement invariant par r ?
5. Soit M un point du plan tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $M' = r \circ r(M)$.
   Déterminer et construire l'ensemble des points M' lorsque M varie.

Exercice 9



Dans le plan orienté dans le sens direct , on considère un triangle ABC isocèle de sommet principale A et telque $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\left[2\pi\right]$.
On désigne par P un point du segment [BC] distinct des points B , C et du milieu de [BC] .
La parallèle menée de P à la droite (AB) coupe le segment [AC] en un point Q et la parallèle menée de P à la droite (AC) coupe le segment [AB] en S .

1. a. Montrer que $AQ = BS$.
   b. En déduire qu'il existe une seule rotation r qui transforme A en B et Q en S .
   c. Montrer que $\frac{\pi}{3}$ est une mesure de l'angle de r .
   d. Montrer que $r(C) = A$ et en déduire le centre O de r .
2. On désigne par r' la rotation réciproque de r . Soit E le symétique de B par rapport à A et F l'image de E par r' .
   a. Montrer que C est le milieu du segment [AF]
   b. En déduire la nature du triangle AOF .
3. Soit (C_1) le cercle circonscrit au triangle AOF et (C'_1) son image par r .
   a. Déterminer (C'_1) (on montrera qu'il passe par E et O)
   b. Soit M un point de (C_1) , distinct de E et N son image par r .
   Montrer que les points M , N et E sont alignés .