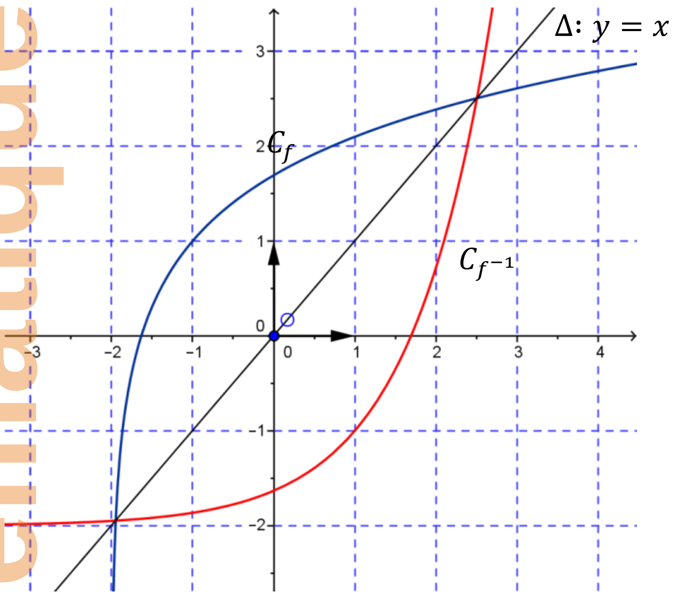
Résumé fonction réciproque fonction racine n[ième]

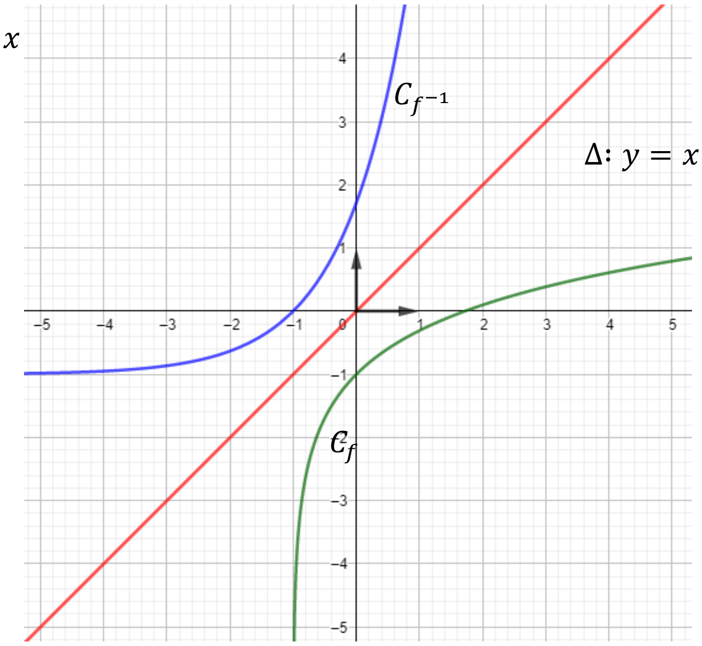
I Fonction réciproque

a) *Théorèmes*

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I

* alors f réalise une bijection de I sur $f(I) = J$
* alors f admet une fonction réciproque notée f^{-1} définie sur J.
* Les fonctions f et f^{-1} ont même sens de variation.
* Si f est continue sur I alors f^{-1} est continue sur J.
* $C_{f^{-1}} = S_\Delta(C_f)$ avec $\Delta: y = x$
* On pose $M' = S_\Delta(M)$ si $M(x\,,y) \in C_f$ alors $M'(y\,,x) \in C_{f^{-1}}$
* $\forall x \in J$ on a $(f\ o\ f^{-1})(x) = x$ $\qquad \forall x \in I$ on a $(f^{-1}\ o\ f)(x) = x$
* $\begin{pmatrix} f^{-1}(x) = y \\ x \in f(I) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(y) = x \\ y \in I \end{pmatrix}$





b) *Dérivabilité de la fonction f^{-1}*

* Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I si f est dérivable en un réel a et $f'(a) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$

* Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I si f est dérivable sur I et $\forall x \in I$; $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et $\forall x \in J$; $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

* On a : $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0^{\pm}$ donc C_f admet à gauche (resp à droite) en x_0 une demi tangente horizontale.

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ est continue en $f(x_0) = y_0$

$$\begin{pmatrix} f^{-1}(y_0) = x_0 \\ y_0 \in J \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(x_0) = y_0 \\ x_0 \in I \end{pmatrix} \quad x \to x_0^{\pm} \quad y \to y_0^{\pm}$$

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{1}{\underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{0^{\pm}}} = \pm\infty$$

alors f^{-1} n'est pas dérivable à gauche (resp à droite) en y_0 et la courbe $C_{f^{-1}}$ aura à gauche (resp à droite) en $f(x_0) = y_0$ une demi tangente verticale.

* On a : $\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \pm\infty$ donc C_f admet à gauche (resp à droite) en x_0 une demi tangente verticale.

La fonction f est continue en $x_0 \Leftrightarrow f^{-1}$ est continue en $f(x_0) = y_0$

$$\begin{pmatrix} f^{-1}(y_0) = x_0 \\ y_0 \in J \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} f(x_0) = y_0 \\ x_0 \in I \end{pmatrix} \quad x \to x_0^{\pm} \quad y \to y_0^{\pm}$$

$$\lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0} = \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)} = \lim_{x \to x_0^{\pm}} \frac{1}{\underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{\pm\infty}} = 0$$

alors f^{-1} est dérivable à gauche (resp à droite) en y_0 et la courbe $C_{f^{-1}}$ aura à gauche (resp à droite) en $f(x_0) = y_0$ une demi tangente horizontale.

*II Fonction racine n^ième^*

a) *Théorème et définition*

* Soit un entier naturel $n \geq 2$ alors la fonction $f : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$
* L'application réciproque de f est appelée la fonction racine $n^{ième}$
* Notation $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$
* Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
* La fonction racine troisième est dite aussi la fonction racine cubique.

b) *Conséquences*

Soit un entier naturel $n \geq 2$

* La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ réalise une bijection de de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$
* $\sqrt[n]{x}$ n'a un sens que lorsque $x \geq 0$
* $\forall x \in \mathbb{R}_+$ on a : $\sqrt[n]{x} \in \mathbb{R}_+$
* $\forall x \in \mathbb{R}_+$; $\forall y \in \mathbb{R}_+$; $y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n$
* $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
* $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
* $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \leq y$
* $\forall x \in \mathbb{R}_+$; on a : $\sqrt[n]{x^n} = x$
* $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$

b) *Règles de calcul*

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}_+$, n et p deux entiers tels que : $n \geq 2$ et $p \geq 2$

* $\sqrt[n]{a \times b} = \sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b}$, $(a \times b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times b^{\frac{1}{n}}$
* $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$
* $\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$, $(a^p)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p$

* $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$, $\left(a^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{np}}$

* $\sqrt[np]{a^p} = \sqrt[n]{a}$, $(a^p)^{\frac{1}{np}} = a^{\frac{1}{n}}$

c) *Dérivabilité de la fonction racine n^ième^*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$

* Si f est continue sur I et pour tout $\in I$, $f(x) \geq 0$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est continue sur I.

* Si f est dérivable sur I et pour tout $\in I$, $f(x) > 0$ alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ est dérivable sur I et de fonction dérivée : $x \mapsto \frac{f'(x)}{n\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)^{n-1}}$

نحن هنا لكي نضع بصمتنا في هذا الكون، وإلا ما فائدة مجيئنا إليه؟" "ستيف جوبز "