Résumé cours Isométries du plan

1) *Définition*

“نحن هنا لكي نضع بصمتنا في هذا الكون، وإلا ما فائدة مجيئنا إليه؟” “ستيف جوبز ”

Soit f une application du plan dans lui-même ; on dit que f est une isométrie du plan si et seulement si : pour tous points M et N d’images respectifs M' et N' par f. On a : $M'N' = MN$

2) *Composée de deux isométries*

La composée de deux isométries du plan est une isométrie du plan.

*** La composée de deux translations est une translation des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.**

*** La composée de deux rotations de même centre I et d’angles θ et β est une rotation de centre I et d’angle $\theta+\beta$**

*** La composée de deux droites parallèles est une translation.**

Soit D et D' deux droites parallèles $I \in D$ et $J \in D'$ tel que $\overrightarrow{IJ}$ orthogonal à D et D'

$S_D \; o \; S_{D'} = t_{2\overrightarrow{JI}}$ et $S_{D'} \; o \; S_D = t_{2\overrightarrow{IJ}}$

*** La composée de deux droites sécantes est une rotation.**

Soient les droites D et D' secantes en I; $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{u}'$ est un vecteur directeur de D'.

$S_{D'} \; o \; S_D$ est la rotation de centre I et d’angle $(\widehat{\vec{u},\vec{u}'})$.

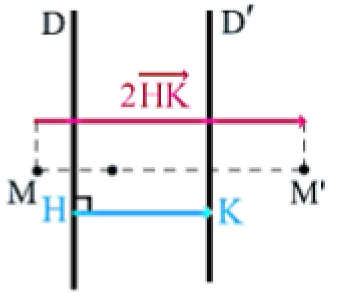
$S_D \; o \; S_{D'}$ est la rotation de centre I et d’angle $(\widehat{\vec{u}',\vec{u}})$.

*** La composée de deux symétries orthogonales d’axes perpendiculaires en un point I est la symétrie centrale de centre I.**

3) *Décomposition d’une isométrie en symétries orthogonales*

*** Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales d’axes parallèles.**

Plus précisement, soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur non nul. D une droite quelconque de direction orthogonale à celle de $\vec{u}$ et H un point de D.

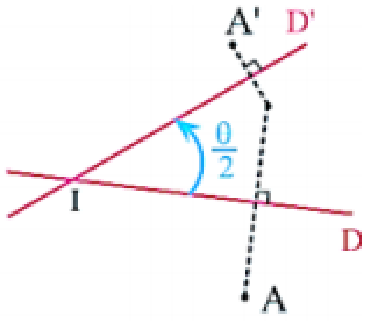


Alors $t_{\vec{u}} = S_{D'} \, o \, S_D$ où D' est la droite parallèle à D et passant par K tel que $\overrightarrow{HK} = \frac{1}{2}\vec{u}$

*Toute rotation est la composée de deux symétries orthogonale d'axes sécants.

Plus précisément, soit R une rotation de centre I et d'angle θ et D une droite quelconque passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}$.

Alors $R = S_{D'} \, o \, S_D$, où D' est la droite passant par I et de vecteur directeur $\vec{u}'$ tel que $(\widehat{\vec{u}\,,\vec{u}'}) = \frac{1}{2}\theta$



4) *Isométrie et conservation*

* Toute isométrie du plan conserve le produit scalaire de deux vecteurs.
* Une isométrie du plan conserve les mesures de angles géométriques.
* Une isométrie du plan transforme trois points alignés en trois points alignés.
* Une isométrie du plan transforme trois points non alignés en trois points non alignés.
* Une isométrie du plan transforme un repère orthonormé en un repère orthonormé.
* Soit f une isométrie du plan et soient deux points A et B tel que $A' = f(A)$ et $B' = f(B)$
  * L'image d'une droite (AB) par f est la droite $(A'B')$
  * L'image d'un segment $[AB]$ par f est le segment $[A'B']$.
* Une isométrie du plan transforme deux droites perpendiculaires en deux droites perpendiculaires.
* Une isométrie du plan transforme deux droites parallèles en deux droites parallèles.
* Une isométrie du plan conserve le barycentre de deux points pondérés.
* Une isométrie du plan conserve le milieu d'un segment de droite.
* L'image d'un cercle de centre I par une isométrie et le cercle de centre $I' = f(I)$ et de même rayon.
* L'image par une isométrie f de la tangente T à un cercle $\mathcal{C}$ en un point A est la tangente T' au cercle $\mathcal{C}' = f(\mathcal{C})$ au point $A' = f(A)$.
* Toute isométrie qui conserve trois points non alignés est l'identité du plan.

*** Une isométrie qui est différente de l'identité et qui laisse <u>deux points fixes A et B</u> est la symétrie axiale d'axe (AB).**

*** Deux isométries qui coïncident sur trois points <u>non alignés</u> sont égales.**

5) *Application réciproque d'une isométrie*

*** La réciproque d'une isométrie du plan est une isométrie du plan.**

*** Soit f et g deux isométries du plan on a :**

***** $\forall M \in P\ ; (f\ o\ f^{-1})(M) = (f^{-1}\ o\ f)(M) = M$

*** Si** $f\ o\ g = idp$ **ou** $g\ o\ f = idp$ **alors** $f = g^{-1}$ **et** $g = f^{-1}$

Applications	Applications réciproques
Translation de vecteur $\vec{u}$	Translation de vecteur $-\vec{u}$
Rotation de centre I et d'angle θ, $R_{(I,\theta)}$	Rotation de centre I et d'angle θ, $R_{(I,-\theta)}$
Symétrie centrale de centre I, S_I	Symétrie centrale de centre I, S_I
Symétrie orthogonale d'axe Δ, S_Δ	Symétrie orthogonale d'axe Δ, S_Δ
$f\ o\ g$	$(f\ o\ g)^{-1} = g^{-1} o\ f^{-1}$

6) *Isométries du plan et points fixes*

Isométrie	L'ensemble des points fixes
Translation de vecteur $\vec{u}$	Ne fixe aucun point du plan
Symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$	Ne fixe aucun point du plan
Rotation de centre I et d'angle θ	Fixe le point I
Symétrie axiale d'axe Δ	Chaque point de la droite Δ est l'image de lui-même
Identité du plan	Chaque points du plan est l'image de lui-même

*** Soit f une isométrie du plan est $A' = f(A)$ tel que $A \neq A'$ alors tout point invariant par f s'il existe appartient à la médiatrice du segment $[AA']$.**

7) *Isométries du plan et points fixes*

*** La composée d'une symétrie orthogonale d'axe Δ et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ directeur de la droite Δ est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$.**

*** Soit f une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$: $f = S_\Delta \, o \, t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \, o \, S_\Delta$**

*** Si $f(A) = A'$ et $I = A * A'$ alors $I \in \Delta$**

$S_\Delta \, o \, t_{\vec{u}}(A) = S_\Delta\big(t_{\vec{u}}(A)\big) = S_\Delta(B) = A'$

$t_{\vec{u}} \, o \, S_\Delta(A) = t_{\vec{u}}\big(S_\Delta(A)\big) = t_{\vec{u}}(C) = A'$

$f \, o \, f = t_{\vec{u}} \, o \, S_\Delta \, o \, S_\Delta \, o \, t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}} \, o \, t_{\vec{u}} = t_{2\vec{u}}$

*** Si $M \in \Delta$ et $f(M) = M'$ alors $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$**