Résumé Primitives 4ème Mathématiques

Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples, c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est complexe « John Neumann »

1) Définition et propriétés

Soit f et F deux fonctions définies sur un intervalle I. On dit que F est une primitive de f sur I si et seulement :

- ¤ F est dérivable sur I
- ¤ $\forall x \in I\ ;\ F'(x) = f(x)$

* *Théorème (admis) :*

Toute fonction continue sur un intervalle I admet au moins une primitive sur l'intervalle I.

* *Théorème :*

Soit F une primitive d'une fonction f sur un intervalle I et G une fonction définie sur l'intervalle I.
G est une primitive de f si et seulement il existe un réel k tel que : $\forall x \in I\ ;\ G(x) = F(x) + k$.

* *Corollaire :*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ; $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ alors il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

* *Primitives usuelles :*

Dans le tableau ci-dessous F est une primitive f sur l'ensemble E et c est constante réelle.

f	E	F
$x \mapsto a\ ;\ (a \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto ax + c$
$x \mapsto x^n\ ;\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}\ ;\ n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$
$x \mapsto \cos x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \sin x + c$
$x \mapsto \cos(ax+b)\ ;\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$x \mapsto \sin x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\cos x + c$
$x \mapsto \sin(ax+b)\ ;\ a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$
$x \mapsto 1 + tan^2 x$	$\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$	$x \mapsto \tan x$

* *Calcul des primitives :*

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Dans le tableau ci-dessous F est une primitive de f sur son domaine de définition.

f	F
$u' + v'$	$u + v$
$u' \times v + u \times v'$	$u \times v$
$\alpha u'$; $\alpha \in \mathbb{R}$	αu
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}$; $n \in \mathbb{N}^*$ et $n \neq 1$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
$u'(v' o\, u)$	$v\ o\ u$
$u'\sqrt[n]{u^{1-n}}$ $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$	$n\sqrt[n]{u}$

* *Exercices d'application :*

Exercice 1

Soit la fonction $f : x \mapsto 2x + \cos x$

1) Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}$.
2) Vérifier que la fonction $F : x \mapsto x^2 + \sin x$ est une primitive de $\mathbb{R}$.
3) Déterminer la primitive G de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants déterminer une primitive de f sur un intervalle bien choisie.

1) $f(x) = \cos(2x)$
2) $f(x) = \frac{\sin x}{cos^4 x}$
3) $f(x) = tan^2 x$
4) $f(x) = cos^3 x \sin x$
5) $f(x) = (-2x+3)\sqrt{2x^2 - 6x}$
6) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 3x - 2$
7) $f(x) = (-x+2)(x^2 - 4x + 1)^3$
8) $f(x) = cos^4 x$
9) $f(x) = \frac{2x\cos x + x^2 \sin x}{cos^2 x}$
10) $f(x) = \frac{\cos x}{1 - cos^2 x}$
11) $f(x) = \tan x + tan^3 x$
12) $f(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$
13) $f(x) = (x+3)^3 + (4x+3)^2$
14) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$
15) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2 + 3}{x^2}$
16) $f(x) = \frac{1}{tan^2 x} + 1$
17) $f(x) = \sqrt{x-3} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$
18) $f(x) = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2-2x+3}} + \frac{x^2}{(x^3+2)^2}$

Cher « Math » je ne souhaite plus résoudre tes problèmes,

J'ai déjà les miens, et ils sont très nombreux. Cordialement un(e) élève qui en a marre.