1) Définition et propriétés

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I. Soit F une primitive de de f sur I.

Le réel $F(b)-F(a)$ est appelé l'intégrale de a à b et noté $\int_a^b f(x)\,dx$.

Propriétés

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de l'intervalle I on a

* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(u)\,du$ * $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

* $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ * $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

Retenons

Soit α et β deux réels et f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a et b deux réels de I. On a :

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que les fonctions u' et v' sont continues sur I et a et b deux réels de l'intervalle I. On a :

$$\int_a^b (u(x)\times v'(x))\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b (u'(x)\times v(x))\,dx$$

2) Applications de l'intégrale

Calculs d'aires

Le plan est muni d'un repère <u>orthogonal</u> $R=(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$; l'unité d'aire ; notée UA , est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{\imath}\|$ et $\|\vec{\jmath}\|$.

*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et soit C_f sa courbe dans le repère R.**

Alors $\int_a^b |f(x)|\,dx$ est la mesure de l'aire du domaine plan limité par la courbe C_f l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

*** Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ avec $a<b$ et soit C_f sa courbe dans le repère R. Soit la droite Δ: $y=\alpha x+\beta$.**

Alors $\int_a^b |f(x)-(\alpha x+\beta)|\,dx$ est la mesure de l'aire du domaine plan limité par la courbe C_f et la droite Δ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

* Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,,b]$ avec $a<b$ et soit C_f et C_g leurs courbes respectives dans le repère R.

Alors $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ est la mesure de l'aire du domaine plan limité par les les courbes C_f et C_g et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.

3) Intégrales et inégalités

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ <u>où $a<b$</u> et $I=\int_a^b f(x)\,dx$

* Si $\forall x\in[a\,,b]$; $f(x)\geq 0$ alors $I\geq 0$
* Si $\forall x\in[a\,,b]$; $f(x)\geq 0$ et f n'est nulle sur aucun intervalle contenu dans $[a\,,b]$ alors $I>0$.
* Si $\forall x\in[a\,,b]$; $f(x)>0$ alors $I>0$
* Si $\forall x\in[a\,,b]$; $f(x)\leq 0$ alors $I\leq 0$
* Si $\forall x\in[a\,,b]$; $f(x)\leq 0$ et f n'est nulle sur aucun intervalle contenu dans $[a\,,b]$ alors $I<0$.
* Si $\forall x\in[a\,,b]$; $f(x)<0$ alors $I<0$

Théorème

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a\,,b]$ avec $a<b$
Si $\forall x\in[a\,,b]$ on a : $f(x)\leq g(x)$ alors : $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_b^c g(x)\,dx$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ avec $a<b$ alors : $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|\,dx$

4) Valeur moyenne d'une fonction continue

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ avec $a<b$ le reel : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur $[a\,,b]$ notée $\overline{f}_{[a\,,b]}$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ avec $a<b$ et m et M deux reels tels que $\forall x\in[a\,,b]$ on a : $m\leq f(x)\leq M$ alors $m\leq\overline{f}_{[a\,,b]}\leq M$

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a\,,b]$ avec $a<b$ alors il existe un reel $c\in[a\,,b]$ tel que $\overline{f}_{[a\,,b]}=f(c)$

5) Fonction définie par une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

Conséquence

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$ alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I est $\forall \in I$; $F'(x) = f(x)$.

Théorème (hors programme 2020/2021)

Soit u et f deux fonctions

Si
- * u est dérivable sur un intervalle I.
- * f est continue sur un intervalle J.
- * a un réel de l'intervalle J.
- * $\forall x \in I$, $u(x) \in J$

$$Alors\ la\ fonction\ F : x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,dt\ \ est\ dérivable\ sur\ I\ et\ \forall x \in I\ , F'(x) = u'(x).f(u(x))$$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de centre 0 on a :

* Si f est paire alors pour tout $\in I$, on a : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 2\int_0^a f(t)\,dt\ 0$

* Si f est impaire alors pour tout $\in I$, on a : $\int_{-a}^a f(t)\,dt = 0$

Théorème

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T avec $T \in \mathbb{R}^*{}_+ \forall a \in \mathbb{R}$ on a

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$