Résumé Fonction Logarithme Népérien

1) *Définition et propriétés*

a) *Théorème et définition*

* La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*_+$ donc elle admet au moins une primitive sur $\mathbb{R}^*_+$

* La primitive sur $\mathbb{R}^*_+$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1 est appelé la fonction Logarithme Népérien notée : ln.

b) *Conséquences*

* $\mathbb{R}^*_+$ est le domaine de définition de ln.

* La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

* Pour tout $a \in \mathbb{R}^*_+$ et pour tout $b \in \mathbb{R}^*_+$ on a :

$$ln\, a = ln\, b \iff a = b$$

$$ln\, a \leq ln\, b \iff a \leq b$$

*

x	0		1		$+\infty$
$ln\, x$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

c) *Dérivabilité des fonctions du type $ln\ o\ u$ et $ln\ o\ \|u\|$*

* ***Théorème***

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $x \in I$; $u(x) > 0$. Alors la fonction $ln\ o\ u$ est dérivable sur I et $x \in I$; $(ln\ o\ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

* ***Théorème***

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $x \in I$; $u(x) \neq 0$. Alors la fonction $ln\ o\ |u|$ est dérivable sur I et $x \in I$; $(ln\ o\ |u|)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

* ***Conséquence***

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $x \in I$; $u(x) \neq 0$. Alors la fonction $x \mapsto ln\ o\ |u|(x)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

* ***Théorème***

* La fonction $x \mapsto x ln\, x - x$ est une primitive de la fonction $x \mapsto ln\, x$ sur $\mathbb{R}^*_+$.

2) *Règles de calculs*

$\forall a \in \mathbb{R}^*_+$; $\forall b \in \mathbb{R}^*_+$; $\forall p \in \mathbb{Z}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ on a :

* $ln\,(a \times b) = ln\, a + ln\, b$ * $ln\,\left(\frac{a}{b}\right) = ln\, a - ln\, b$ * $ln\,\left(\frac{1}{a}\right) = -ln\, a$

* $ln\,(a^p) = p \times ln\, a$ * $ln\,(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} ln\, a$ cas particulier $ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} ln\, a$

3) *Limites particulaires*

Soient n et m deux entiers naturels non nuls

* $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$
* $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$
* $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0$
* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$
* $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n(\ln x)^m = 0$
* $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x^m} = 0$
* $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$

4) Représentation graphique de la fonction ln x

* La fonction $\ln$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*{}_+$.

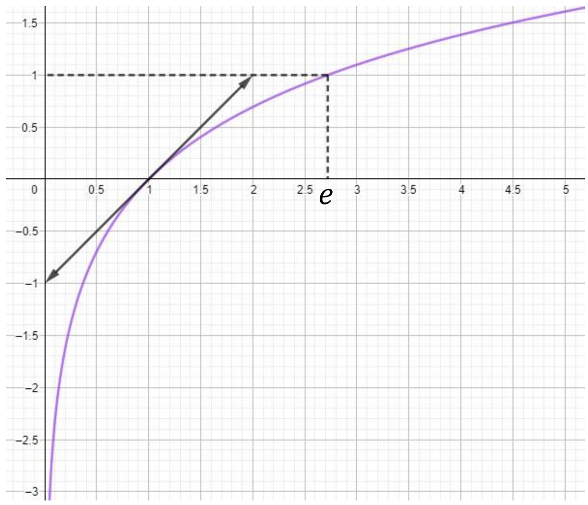
x	0		$+\infty$
$(\ln)'(x)$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On a : $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc la courbe de C de la fonction $\ln$ admet une branche parabolique de direction $(O\,,\vec{\imath}\,)$ au voisinage de $+\infty$.

Soit T la tangente à C au point d'abscisse 1 alors :

$T : y = (\ln)'(1)(x-1) + \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad y = x - 1$

L'antécédent de 1 par la fonction $\ln$ est noté e et $e \simeq 2{,}71$



5) Fonction logarithme de base a

* Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^*{}_+\backslash\{1\}$; on appelle la fonction logarithme de base a, notée : $\log_a$ la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln a}$

« La vie n'est bonne qu'à étudier et à enseigner les mathématiques »