Produit scalaire produit vectoriel $\qquad$ $4^{\text{ème}}$ Sc Techniques

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

On considère les points $A\,(2,4,1)$, $B\,(0,4,-3)$, $C\,(3,1,-3)$, $D\,(1,0,-2)$, $E\,(3,2,-1)$ et $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$

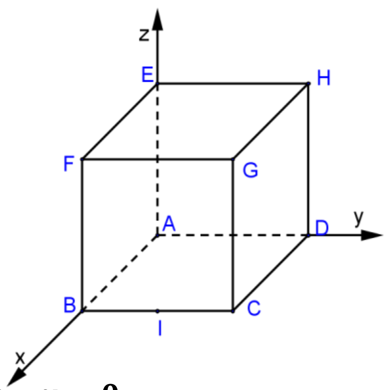
1) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.
2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).
3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante : $(CD) : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ y = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
5) Le point I est sur la droite (AB).

Exercice 2

On considère les points : $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$ et $C(0, 2, -1)$.

1) Montrer que A, B, et C ne sont pas alignés.
2) On pose $\vec{U} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   a) Calculer les composantes du vecteur $\vec{U}$
   b) Donner une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$.
   c) Calculer l'aire du triangle ABC
3) a) Soit le point $D(-1, -3, -1)$. Montrer que $D \notin P$.
   b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à P et passant par D
   c) Montrer que A est le projeté orthogonal de D sur P.
4) a) Calculer $det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
   b) En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 3



La figure ci- contre est celle d'un cube ABCDEFGH d'arête 1

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$

1) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}$ est égale à :

   a) 0 $\qquad$ b) $\sqrt{2}$ $\qquad$ c) $\sqrt{2}$

2) Une équation du plan (ECG) est :

   a) $x + y - 2 = 0$ $\qquad$ b) $x + y - 1 = 0$ $\qquad$ c) $x - y = 0$

3) On désigne par I le milieu du segment $[EG]$.

Soit S la sphère de centre I et passant par F. Alors on a :

   a) Le plan (BEG) est tangent à la sphère S.
   b) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre $[EG]$.

c) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH.

Exercice 4

Soit S l'ensemble des points $M(x\,,y\,,z)$ de $\mathcal{E}$ tel que $x^2+y^2+z^2-2x+2z+1=0$

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.

2) Soit le plan $P : x+z-1=0$. Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.

3) Soit le point $A(2\,,0\,,-1)$.

a) Vérifier que $A \in S$.

b) Donner une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A.

c) Montrer que P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection

Exercice 5

On considère les plans P : $5x-y+2z-5=0$ et Q : $-5x+y-2z+4=0$

1) Montrer que P et Q sont parallèles.

2) On considère les points $A(1\,,2\,,1)$, $B(1\,,0,0)$, $C(0\,,-1\,,2)$ et $D(0\,,1\,,3)$

a) Vérifier que A, B et C appartiennent à P

b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme et en déduire que $D \in P$.

c) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et en déduire que $ABCD$ est un rectangle.

3) Soient A', B', C' et D' les projetés orthogonaux respectivement de A, B, C, et D sur Q.

a) Déterminer les coordonnées de A', B', C' et D'.

b) Montrer que $ABCDA'B'C'D'$ est un parallélépipédique.

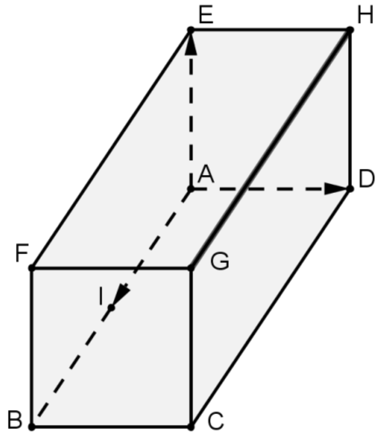
c) Calculer le volume de $ABCDA'B'C'D'$.

Exercice 4

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $AB=2\,,AD=AE=1$.

On désigne par I le milieu de $[AB]$

On munit l'espace du repère orthonormé $(A,\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.



1) Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AE}$ est égal à

a) $2\overrightarrow{AD}$ b) $-2\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{DA}$

2) L'intersection des plans d'équations $y=1$ et $z=1$ est la droite

a) (FG) b) (DG) c) (GH)

3) Une équation du plan (AHG) est

a) $y-z=0$ b) $y+z=0$ c) $y+z-2=0$

Exercice 6

Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ **de** ξ **tel que** $x^2+y^2+z^2-2x-3=0$ **et le point** $B(0,-1,1)$

1) Montrer que S est une sphère de centre $A(1,0,0)$ **et de rayon 2**

2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)

b) Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à (AB) en B

3) Montrer que l'intersection de S et P est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon

4) Soit m un réel. Soit le plan $P_m : mx+my-z+2=0$

a) Etudier suivant les valeurs de m la position relative de S et P_m

b) Montrer que le plan P_0 **est tangent à la sphère S et déterminer les coordonnées du point de contacte C**

Exercice 7

On donne le point $I(-1,3,0)$ **et les plans** $P_1 : 2x-y+z+5=0$ **et** $P_2 : x-2z+1=0$

1) a) Montrer que les plans P_1 et P_2 **sont perpendiculaires**

b) Montrer que la droite $D=P_1\cap P_2$ **passe I et dont un vecteur directeur est** $\vec{U}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$

c) Montrer que le plan P, perpendiculaire à D et passant par le point $A(2,0,-1)$**, a pour équation cartésienne :** $2x+5y+z-3=0$

2) a) Déterminer par ces coordonnées le point H commun à D et P

b) Calculer de deux manières la distance $d(A;D)$

3) Soit $S=\left\{M(x,y,z) \text{ tel que } x^2+y^2+z^2+2x-6y-6=0\right\}$

a) Montrer que S est une sphère de centre le point I et dont on déterminera le rayon R

b) Montrer que $S\cap P$ **est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon**

c) Déterminer par leurs coordonnées les points communs à S et D

4) Déterminer par leurs équations cartésiennes les plans parallèles à P et tangents à S

Exercice 8

On considère les points $A(-1,1,3)$**,** $B(2,1,0)$ **et** $C(2,-1,2)$

1) a) Montrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés

b) On note P le plan (ABC) . Montrer qu'une équation cartésienne de P et $x+y+z-3=0$

2) a) Soit Q le plan médiateur de $[AB]$ **Montrer qu'une équation cartésienne de Q et** $x-z+1=0$

b) On note D la droite d'intersection de P et Q. Trouver une équation cartésienne de D

3) Soit $S=\left\{M(x,y,z)\in\xi \text{ tel que } MB^2+\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC}=0\right\}$

a) Vérifier que $M(x,y,z)\in$ **S** $\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=0$

b) En déduire que S est une sphère de centre $I(2,0,1)$ **et de rayon** $R=\sqrt{2}$

c) Montrer que le plan Q est tangent à S en un point H dont on déterminera les coordonnées

4) Soit $S_m=\left\{M(x,y,z)\in\xi \text{ tel que } x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2(m+3)z+5m-10=0\right\}$ **; m**$\in$ **IR**

a) Montrer que S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m\,,m\,,m+3)$ et dont on déterminera le rayon R_m

b) Que décrit le point Ω_m lorsque m décrit IR

c) Discuter selon m la position relative de S_m et P

Exercice 9

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

On donne les points A(0 ; 0 ; 2) B(0 ; 4 ; 0) et C(2 ; 0 ; 0).

On désigne par I le milieu du segment [BC], par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

a) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0$ **est le plan (AIO)**

b) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$ **est la sphère de diamètre [BC] .**

c) Le volume du tétraèdre OABC est égal à 4 .

d) Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x+y+2z-4=0$ **et le point H a pour coordonnées** $\left(\frac{8}{9}\,,\,\frac{4}{9}\,,\,\frac{8}{9}\right)$ **.**

e) La droite (AG) admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2-2t \end{cases}$ **,** $t \in IR$

Exercice 10

On désigne par S l'ensemble des points $M(x\,,y\,,z)$ **tels que** $x^2+y^2+z^2-4y-5=0$

1) Montrer que S est une sphère de centre $\Omega(0\,,2\,,0)$ et de rayon 3

2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x-2y+z-2=0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S\cap P$

3) Soit le plan P_m dont une équation cartésienne est : $2mx+(1-2m)y+mz+1-2m=0$

a) Soit Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1 \\ z=-2\lambda \end{cases}$; $\lambda \in IR$

Vérifier que la droite Δ **est incluse dans** P_m

b) Calculer la distance $d(\Omega, P_m)$ du point Ω au plan P_m

d) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S. Préciser les coordonnées du point de contacte

Exercice 11

On considère les points $A(1,1,-2)$, $B(1,2,-2)$ **et** $C(0,1,1)$

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan P

2) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+\vec{k}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est $3x+z-1=0$

3) Soit Q le plan perpendiculaire à (AC) passant par A

a) Donner une équation cartésienne de Q

b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB)

4) Soit S_m l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que : $x^2+y^2+z^2-2x-2my+4z+4=0 \quad (m\in IR)$

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Montrer que l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans IR , est la droite (AB).

Exercice 12

On considère les points $A(1\,,2\,,-1)$ et $B(2\;1\,,1)$.

1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB)

2) Soit P_m le plan d'équation : $x+y+m-3=0$ où m est un paramètre réel.

a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m.

b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est incluse dans le plan P_m.

c) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q.

3) Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m.

Déterminer les valeurs de m pour que $ABB'A'$ soit un carré.

Exercice 13

On considère les plans $P : x-z=0$ et $Q: x-y+z-1=0$.

1) a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires.

b) On désigne par $D=P\cap Q$, donner une représentation paramétrique de D.

2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\Delta\colon \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=2 \\ z=1-\alpha \end{cases} \quad \alpha\in\mathbb{R}$

a) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan P et déterminer les coordonnées du point A intersection de Δ et P.

b) Soit H le projeté orthogonal de A sur Q. Montrer que la droite (AH) est incluse dans P.

3) Soit M un point quelconque de Δ et soit M' le projeté orthogonal de M sur le plan Q.

a) Montrer que les plans (AMH) et $|(MM'H)$ sont parallèles.

a) En déduire que les points A, H, M et M' sont coplanaires.

4) a) Montrer que si $M\neq A$, le quadrilatère AMM'H est un rectangle

b) Déterminer les coordonnées des points M pour que $AMM'H$ soit un carré.

c) Déterminer les coordonnées des points M pour que $d(M\,,D)=5$.

Exercice 14

On considère les points $(1\,,2\,,2)$, $B(3\,,2\,,1)$ et $C(1\,,3\,,3)$.

1) a) Montrer que les points A, B, et C ne sont pas alignés.

b) Donner un vecteur normal au plan P contenant les points A, B et C.

c) En déduire une équation cartésienne du plan P.

d) Déterminer une représentation paramétriques de la droite D passant par le point A et perpendiculaire P

2) On considère les plans $P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0$.

a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.

b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 . Montrer que le point C appartient à la droite Δ et que le vecteur $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ.

3) Calculer la distance du point A à la droite Δ.

4) On désigne par Q le plan perpendiculaire à la droite Δ et passant par le point A.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Montrer que le point $H\left(\frac{7}{5}, 3, \frac{14}{5}\right)$ est le projeté orthogonal du point A sur Δ.

c) Retrouver la distance du point A à la droite Δ.

Exercice 11

On considère les points : $A(4, 0, 0)$, $B(0, 0, 4)$ et $C(0, 4, 0)$.

1) **a)** Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points , B et C déterminent un plan P.

b) Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x + y + z - 4 = 0$

2) Soit $S = \{M(x, y, z) \in E / x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0\}$

a) Montrer que S est une sphère de centre $I(0, 2, 2)$ et de rayon $R = 2\sqrt{2}$.

b) Vérifier que $[BC]$ est un diamètre de S.

c) Soit K le milieu du segment $[AC]$. Calculer $\overrightarrow{KB}.\overrightarrow{KC}$ et en déduire que $K \in S$.

d) En déduire que P coupe S suivant un cercle C_1 que l'on caractérisa.

3) Soit Q le plan passant par K et perpendiculaire à la droite (BC).

a) Montrer qu'une équation cartésienne de Q est $y - z - 2 = 0$.

b) Vérifier alors que $H(0, 3, 1)$ est le projeté orthogonal de K sur la droite (BC).

4) **a)** Montrer que la distance du point K à la droite (BC) est égale à $\sqrt{6}$.

b) En déduire que Q coupe S suivant un cercle C_2 dont on précisera le centre et le rayon.

5) En déduire l'intersection de C_1 et C_2.