

Dans tous les exercices l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Exercice 1

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dire, sans le justifier, si elle est vraie ou si elle est fausse.

On considère les points $A(2, 4, 1)$, $B(0, 4, -3)$, $C(3, 1, -3)$, $D(1, 0, -2)$, $E(3, 2, -1)$ et $I\left(\frac{3}{5}, 4, -\frac{9}{5}\right)$

- 1) Une équation du plan (ABC) est : $2x + 2y - z - 11 = 0$.
- 2) Le point E est le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .
- 3) Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.
- 4) La droite (CD) est donnée par la représentation paramétrique suivante : $(CD): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$
- 5) Le point I est sur la droite (AB) .

Exercice 2

On considère les points : $A(1, 0, 1)$, $B(2, 0, 0)$ et $C(0, 2, -1)$.

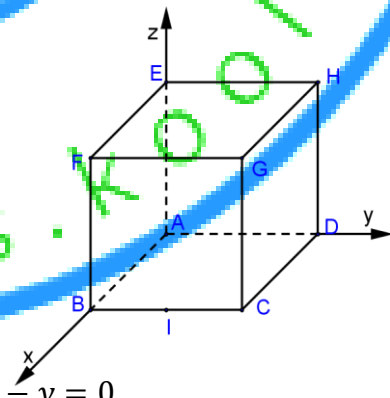
- 1) Montrer que $A, B,$ et C ne sont pas alignés.
- 2) On pose $\vec{U} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}$
 - a) Calculer les composantes du vecteur \vec{U}
 - b) Donner une équation cartésienne du plan $P = (ABC)$.
 - c) Calculer l'aire du triangle ABC
- 3) a) Soit le point $D(-1, -3, -1)$. Montrer que $D \notin P$.
 b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ perpendiculaire à P et passant par D
 c) Montrer que A est le projeté orthogonal de D sur P .
- 4) a) Calculer $\det(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.
 b) En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

Exercice 3

La figure ci- contre est celle d'un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1

On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

- 1) $\vec{AC} \cdot \vec{BH}$ est égale à :
 - a) 0
 - b) $\sqrt{2}$
 - c) $\sqrt{2}$
- 2) Une équation du plan (ECG) est :
 - a) $x + y - 2 = 0$
 - b) $x + y - 1 = 0$
 - c) $x - y = 0$



3) On désigne par I le milieu du segment $[EG]$.

Soit S la sphère de centre I et passant par F . Alors on a :

- a) Le plan (BEG) est tangent à la sphère S .
- b) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle de diamètre $[EG]$.

c) L'intersection de la sphère S et le plan (BEG) est le cercle circonscrit au triangle EGH .

Exercice 4

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de \mathbb{E}^3 tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z + 1 = 0$

- 1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
- 2) Soit le plan $P : x + z - 1 = 0$. Montrer que P et S sont sécants suivant un cercle (C) dont on déterminera le centre et le rayon.
- 3) Soit le point $A(2, 0, -1)$.
 - a) Vérifier que $A \in S$.
 - b) Donner une équation cartésienne du plan Q tangent à S en A .
 - c) Montrer que P et Q sont sécants et donner une représentation paramétrique de leur droite d'intersection

Exercice 5

On considère les plans $P : 5x - y + 2z - 5 = 0$ et $Q : -5x + y - 2z + 4 = 0$

- 1) Montrer que P et Q sont parallèles.
- 2) On considère les points $A(1, 2, 1)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, -1, 2)$ et $D(0, 1, 3)$
 - a) Vérifier que A, B et C appartiennent à P .
 - b) Montrer que $ABCD$ est un parallélogramme et en déduire que $D \in P$.
 - c) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ et en déduire que $ABCD$ est un rectangle.
- 3) Soient A', B', C' et D' les projetés orthogonaux respectivement de A, B, C , et D sur Q .
 - a) Déterminer les coordonnées de A', B', C' et D' .
 - b) Montrer que $ABCD A' B' C' D'$ est un parallélépipède.
 - c) Calculer le volume de $ABCD A' B' C' D'$.

Exercice 6

Soit S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de \mathbb{E}^3 tel que $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3 = 0$ et le point $B(0, -1, 1)$

- 1) Montrer que S est une sphère de centre $A(1, 0, 0)$ et de rayon 2
- 2) a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB)
b) Déterminer une équation cartésienne du plan P perpendiculaire à (AB) en B
- 3) Montrer que l'intersection de S et P est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon
- 4) Soit m un réel. Soit le plan $P_m : mx + my - z + 2 = 0$
 - a) Etudier suivant les valeurs de m la position relative de S et P_m
 - b) Montrer que le plan P_0 est tangent à la sphère S et déterminer les coordonnées du point de contact C

Exercice 7

On donne le point $I(-1, 3, 0)$ et les plans $P_1 : 2x - y + z + 5 = 0$ et $P_2 : x - 2z + 1 = 0$

- 1) a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires
b) Montrer que la droite $D = P_1 \cap P_2$ passe I et dont un vecteur directeur est $\vec{U} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

c) Montrer que le plan P, perpendiculaire à D et passant par le point $A(2, 0, -1)$, a pour équation cartésienne : $2x + 5y + z - 3 = 0$

2) a) Déterminer par ces coordonnées le point H commun à D et P

b) Calculer de deux manières la distance $d(A;D)$

3) Soit $S = \{M(x, y, z) \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0\}$

a) Montrer que S est une sphère de centre le point I et dont on déterminera le rayon R

b) Montrer que $S \cap P$ est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon

c) Déterminer par leurs coordonnées les points communs à S et D

4) Déterminer par leurs équations cartésiennes les plans parallèles à P et tangents à S

Exercice 8

On considère les points $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(2, -1, 2)$

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés

b) On note P le plan (ABC). Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x + y + z - 3 = 0$

2) a) Soit Q le plan médiateur de $[AB]$. Montrer qu'une équation cartésienne de Q est $x - z + 1 = 0$

b) On note D la droite d'intersection de P et Q. Trouver une équation cartésienne de D

3) Soit $S = \{M(x, y, z) \in \xi \text{ tel que } \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\}$

a) Vérifier que $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$

b) En déduire que S est une sphère de centre $I(2, 0, 1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$

c) Montrer que le plan Q est tangent à S en un point H dont on déterminera les coordonnées

4) Soit $S_m = \{M(x, y, z) \in \xi \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2(m+3)z + 5m - 10 = 0\}; m \in \mathbb{R}$

a) Montrer que S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m, m, m+3)$ et dont on déterminera le rayon R_m

b) Que décrit le point Ω_m lorsque m décrit \mathbb{R}

c) Discuter selon m la position relative de S_m et P

Exercice 9

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

On donne les points $A(0; 0; 2)$, $B(0; 4; 0)$ et $C(2; 0; 0)$.

On désigne par I le milieu du segment $[BC]$, par G l'isobarycentre des points A, B et C, et par H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

a) l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ est le plan (AIO)

b) L'ensemble des points M de l'espace tels que $\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$ est la sphère de diamètre $[BC]$.

c) Le volume du tétraèdre OABC est égal à 4.

d) Le plan (ABC) a pour équation cartésienne $2x + y + 2z - 4 = 0$ et le point H a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

e) La droite (AG) admet pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Exercice 10

On désigne par S l'ensemble des points M(x, y, z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 5 = 0$

- 1) Montrer que S est une sphère de centre $\Omega(0, 2, 0)$ et de rayon 3
- 2) Soit P le plan dont une équation cartésienne est : $2x - 2y + z - 2 = 0$

Déterminer la position relative de S et P. Caractériser $S \cap P$

3) Soit le plan P_m dont une équation cartésienne est : $2mx + (1 - 2m)y + mz + 1 - 2m = 0$

a) Soit Δ dont une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = -1 \\ z = -2\lambda \end{cases}; \lambda \in \mathbb{R}$$

Vérifier que la droite Δ est incluse dans P_m

b) Calculer la distance $d(\Omega, P_m)$ du point Ω au plan P_m

d) Déterminer m pour que le plan P_m soit tangent à la sphère S. Préciser les coordonnées du point de contact

Exercice 11

On considère les points A(1, 1, -2), B(1, 2, -2) et C(0, 1, 1)

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan P

2) a) Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 3\vec{i} + \vec{k}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est $3x + z - 1 = 0$

3) Soit Q le plan perpendiculaire à (AC) passant par A

a) Donner une équation cartésienne de Q

b) Montrer que P et Q sont perpendiculaires suivant (AB)

4) Soit S_m l'ensemble des points M(x, y, z) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2my + 4z + 4 = 0$ ($m \in \mathbb{R}$)

a) Montrer que pour tout réel m, S_m est une sphère dont on précisera le centre I_m et le rayon R_m

b) Montrer que l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans \mathbb{R} , est la droite (AB).

Exercice 12

On considère les points A(1, 2, -1) et B(2, 1, 1).

1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB)

2) Soit P_m le plan d'équation : $x + y + m - 3 = 0$ où m est un paramètre réel.

a) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m .

b) Pour quelle valeur de m la droite (AB) est incluse dans le plan P_m .

- c) Montrer que le plan P_m est perpendiculaire au plan Q .
- 3) Soit B' le projeté orthogonal de B sur P_m et A' le projeté orthogonal de A sur P_m . Déterminer les valeurs de m pour que $ABB'A'$ soit un carré.

Exercice 13

On considère les plans $P : x - z = 0$ et $Q : x - y + z - 1 = 0$.

- 1) a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires.
 b) On désigne par $D = P \cap Q$, donner une représentation paramétrique de D .
- 2) Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\Delta : \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 2 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$
- a) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan P et déterminer les coordonnées du point A intersection de Δ et P .
 b) Soit H le projeté orthogonal de A sur Q . Montrer que la droite (AH) est incluse dans P .
- 3) Soit M un point quelconque de Δ et soit M' le projeté orthogonal de M sur le plan Q .
 a) Montrer que les plans (AMH) et $(MM'H)$ sont parallèles.
 a) En déduire que les points A, H, M et M' sont coplanaires.
- 4) a) Montrer que si $M \neq A$, le quadrilatère $AMM'H$ est un rectangle
 b) Déterminer les coordonnées des points M pour que $AMM'H$ soit un carré.
 c) Déterminer les coordonnées des points M pour que $d(M, D) = 5$.

Exercice 14

On considère les points $A(1, 2, 2)$, $B(3, 2, 1)$ et $C(1, 3, 3)$.

- 1) a) Montrer que les points A, B , et C ne sont pas alignés.
 b) Donner un vecteur normal au plan P contenant les points A, B et C .
 c) En déduire une équation cartésienne du plan P .
 d) Déterminer une représentation paramétrique de la droite D passant par le point A et perpendiculaire P
- 2) On considère les plans $P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0$.
 a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants.
 b) Soit Δ la droite d'intersection des plans P_1 et P_2 . Montrer que le point C appartient à la droite Δ et que le vecteur $\vec{U} = 2\vec{i} - \vec{k}$ est un vecteur directeur de Δ .
- 3) Calculer la distance du point A à la droite Δ .
- 4) On désigne par Q le plan perpendiculaire à la droite Δ et passant par le point A .
 a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q .
 b) Montrer que le point $H\left(\frac{7}{5}, 3, \frac{14}{5}\right)$ est le projeté orthogonal du point A sur Δ .
 c) Retrouver la distance du point A à la droite Δ .