

Produit scalaire dans le plan 3ème Mathématiques

Exercice 1

Une seule des réponses est exacte. Trouver cette réponse

- \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs du plan non nuls, l'expression $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ désigne :
 - un nombre réel
 - un vecteur colinéaire à \vec{w}
 - n'a pas de sens
- \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} sont trois vecteurs du plan non nuls tel que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ alors on a nécessairement :
 - $\vec{v} = \vec{w}$
 - $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \perp \vec{w}$
 - $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$
- \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan non nuls tel que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ alors :
 - $\vec{u} \perp \vec{v}$
 - \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires
 - \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires

Exercice 2

Soit OAB un triangle équilatéral de centre de gravité G et de côté $AB = 9$, on désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB)

- Calculer de deux manières $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ et $\vec{OA} \cdot \vec{OH}$
- Calculer $\vec{GH} \cdot \vec{GA}$, $\vec{GH} \cdot \vec{GB}$ et $\vec{GA} \cdot \vec{GB}$
- Montrer que $GO^2 + \vec{GO} \cdot \vec{GA} + \vec{GO} \cdot \vec{GB} = 0$

Exercice 3

Soit un triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 8$ et soit $A' = B * C$.

- Montrer que $AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$
- Calculer AA'
- Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB)
 - Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ de deux manières
 - En déduire AH

Exercice 4

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$ avec $IB = IC = 2$; $IA = 3$ et $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{3}$

- Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - IB^2$
 - En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$
 - En déduire AB et AC
 - Donner la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)

a) Montrer que : $AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{IH}$

b) En déduire IH

Exercice 5

Soit ABC un triangle tels que : $AB = 3$, $AC = 7$ et $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = x$, où $x \in \mathbb{R}$.

Déterminer le réel x pour que le triangle ABC soit rectangle en .

Exercice 6

Soit $ABCD$ est un trapèze rectangle en C et D

et E un point de $[CD]$ et tel que $CE = 3$, $DE = 1$ et $CD = BC = 4$.

1) Montrer que $(\overline{ED} + \overline{DA}) \cdot (\overline{EC} + \overline{CB}) = \overline{ED} \cdot \overline{EC} + \overline{DA} \cdot \overline{CB}$.

2) a) Calculer $\overline{ED} \cdot \overline{EC}$ et $\overline{DA} \cdot \overline{CB}$ en déduire que $\overline{EA} \cdot \overline{EB} = 9$.

b) Montrer que $AE = 10$ et $BE = 5$ puis calculer $\cos \widehat{AEB}$

c) Prouver que $AB = \sqrt{17}$.

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) ..

Montrer que $\overline{CA} \cdot \overline{CB} = 12$ et $\overline{CA} \cdot \overline{CE} = 12$ En déduire que $(CA) \perp (BE)$.

4) Soit $O = B * D$ et $\mathcal{C} = \{M \in P / MB^2 + MD^2 = 26\}$.

a) Vérifier que $A \in \mathcal{C}$.

b) Montrer que pour tout $M \in P$ on a $MB^2 + MD^2 = 2MO^2 + \frac{BD^2}{2}$.

c) Déduire l'ensemble \mathcal{C} .

Exercice 7

Soit $ABCD$ un carré tel que $AB = 3$. On désigne par E le symétrique de C par rapport à B et par J le point du segment $[DC]$ tel que $CJ = 1$ et par K le point du segment $[BE]$ tel que $EK = CJ$.

1) Montrer que $\overline{AD} \cdot \overline{AK} = -6$ et $\overline{JD} \cdot \overline{AK} = -6$ puis déduire que $(AJ) \perp (AK)$.

2) a) Calculer KD et KJ .

b) Calculer $\cos(\widehat{DKJ})$ puis déduire que $\overline{KJ} \cdot \overline{KD} = 28$.

3) a) Soit I le milieu de $[JK]$. Montrer que : $DI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

b) Soit $\mathcal{C} = \{M \in P / \overline{MJ} \cdot \overline{MK} = 6\}$. Montrer que \mathcal{C} est le cercle de centre I et de rayon DI

4) a) Vérifier que D est le barycentre des points pondérés $(J, 3)$ et $(C, -2)$.

b) Soit $f(M) = 3MJ^2 - 2MC^2$ et $g(M) = f(M) - MC^2$ et $H = D * C$.

Montrer que $f(M) = MD^2 - 6$ et $g(M) = 2\overline{MH} \cdot \overline{CD} - 6$.

c) Déterminer les ensembles suivants :

$\mathcal{C}' = \{M \in P / f(M) = 3\}$ et $\Delta = \{M \in P / g(M) = -6\}$

Exercice 8

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 2 et ACD un triangle isocèle rectangle en A .

1) Montrer que $\overline{AD} \cdot \overline{AB} = -2\sqrt{3}$

b) Montrer que $\overline{AD} \cdot \overline{CB} = \overline{AD} \cdot \overline{AB}$

c) Montrer alors que $\overline{CD} \cdot \overline{CB} = 2(1 - \sqrt{3})$

d) En déduire que $CE = \sqrt{3} - 1$

e) Montrer que $DE = \sqrt{3} + 1$

2) Soit O le milieu de $[BC]$ et F le point de $[OA]$ tel que $OF = 1$

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, E et D dans le repère $(O, \overline{OC}, \overline{OF})$

b) Montrer alors que $\overline{AE} \perp \overline{BD}$

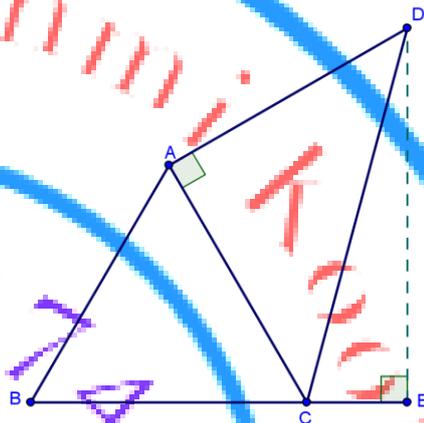
3) Soient $\Delta = \{M \in P / MC^2 - MB^2 = -4\sqrt{3}\}$ et $\Gamma = \{M \in P / MC^2 + MB^2 = 8\}$

a) Montrer que $M \in \Delta$ équivaut à $2\overline{MO} \cdot \overline{BC} = -4\sqrt{3}$

b) Vérifier que $E \in \Delta$

c) Montrer $\Delta = (DE)$

d) Montrer Γ que est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.



Exercice 9

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points:

$A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$ et $C(\frac{5}{2}, 4)$

1) a) Calculer AB et AC

b) Calculer $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ et donner la valeur de : $\cos(\widehat{BAC})$

2) a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$, calculer GA et G

b) Montrer que : $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$

c) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 = \frac{22}{3}$

Exercice 10

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(2, 2)$; $B(1, 1)$ et $C(4, 0)$

- 1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A
- 2) Calculer les distances AB , AC et BC
- 3) Calculer $\vec{CA} \cdot \vec{CB}$ et en déduire la valeur de $\cos(\widehat{ACB})$
- 4) On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et par $I = A * B$
 - a) Calculer les distances IH et AH
 - b) Déterminer les coordonnées du point H

Exercice 11

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(4, 0)$; $B(2, 2\sqrt{3})$ et $C(0, -4)$

- 1) a) Vérifier que $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 8\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$
 - b) Vérifier que $CA = 4\sqrt{2}$ et $CB = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
 - c) Montrer que $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la valeur de \widehat{ACB}
- 2) a) Calculer $\vec{AD} \cdot \vec{AB}$
 - b) En déduire la nature du triangle ADB
- 3) a) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $E = \{M \in P / \vec{MA} \cdot \vec{AC} = 12\}$
déterminer alors E
 - b) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $F = \{M \in P / MA^2 + MC^2 = 20\}$
déterminer alors E

Exercice 12

Soit $ABCD$ est un carré de côté 3 ; on désigne par E et F les points tels que $\vec{AE} = \frac{2}{3}\vec{AB}$ et

$$\vec{CF} = -\frac{2}{3}\vec{CB}$$

- 1) a) Montrer que $\vec{DA} \cdot \vec{DF} = -6$ et $\vec{EA} \cdot \vec{DF} = -6$
 - b) En déduire que les droites (DE) et (DF) sont perpendiculaires.

2) a) Montrer que $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FA} = 28$

b) Calculer les distance FE et FA . En déduire $\cos \widehat{EFA}$.

3) On désigne par I le milieu de $[EF]$.

Soit $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 6\}$

a) Montrer que Γ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

b) Montrer que $A \in \Gamma$. Construire alors Γ .

c) La droite (AF) recoupe Γ en H , soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle Γ .

Montrer que $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FH} = -6$

4) Soit $\mathcal{E}_k = \{M \in \mathcal{P} / 5MC^2 - 2MB^2 = k\}$, où k est un paramètre réel.

a) Vérifier que F est le barycentre des points pondérés $(C, 5)$ et $(B, -2)$

b) Discuter selon k la nature de l'ensemble \mathcal{E}_k .

5) Soit N un point de (AD) et N' le point de (DC) vérifiant $\overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{EN'} = -DE^2$

On pose $J = N * N'$

a) Montrer que $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DJ} = DE^2$.

b) En déduire que lorsque N varie sur (AD) , J varie sur une droite Δ que l'on précisera.

c) Pour quelle valeur de k , Δ est elle tangente à \mathcal{E}_k ?

Exercice 13

Dans la figure ci-contre $AICJ$ est un rectangle tel que $AC = 4\sqrt{3}$ et B un point de $[IA]$ tel que $AB = BC = 4$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$

2) En déduire que $\cos \widehat{BAC} = -\frac{1}{2}$ et que $BI = 2$

3) Montrer que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI} = 121$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} = 12$.

4) En déduire que $(CB) \perp (IJ)$

5) Soient $\Delta = \{M \in \mathcal{P} / MA^2 - MB^2 = 32\}$ et $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} / MA^2 + MB^2 = 64\}$.

a) Montrer que $M \in \Delta$ signifie que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$ avec $O = A * B$.

b) Montrer que $C \in \Delta$ puis déterminer Δ . n

c) Montre que Γ est le cercle de centre O passant par C .