

Produit scalaire dans le plan 3ème Sc Techniques

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que $AB = AC = 5$ $BC = 6$ et $I = B * C$.

- 1) Faire une figure.
- 2) Calculer AI ; $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$.
- 3) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$.
b) En déduire la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$

Exercice 2

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2$ et $AD = 3$.

Soient les points E et F tel que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

- 1) a) Faire une figure.
b) Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FE}$.
- 2) a) Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{CF}$.
b) Montrer alors que $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$
c) En déduire que $(DE) \perp (DF)$.
- 3) Soit $\mathcal{T} = \{M \in P \text{ tel que } MB^2 + 3ME^2 = 16\}$.
a) Montrer que C est le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(E, 3)$.
b) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MB^2 + 3ME^2 = 4MC^2 + 12$.
c) En déduire l'ensemble \mathcal{T} .

Exercice 3

Soient A et B deux point du plan tel que $AB = 4$.

- 1) Construire le point G barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$.
- 2) Soit M un point du plan. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de \overrightarrow{MG} .
- 3) On pose $I = A * G$. Déterminer et construire les ensemble suivants :
a) $E = \{M \in P \text{ tel que } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MA} = 7\}$.
b) $F = \{M \in P \text{ tel que } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{GA} = -18\}$.

Exercice 4

Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$ et $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ et soit $I = B * C$.

- 1) Faire une figure.
- 2) En utilisant la formule d'El Kashi montrer que $AI = 2\sqrt{13}$.
- 3) Soit $\mathcal{K} = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 24\}$
a) Montrer que $A \in \mathcal{K}$.

- b) Montrer que \mathcal{E} est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{37}$.
- c) Construire E dans le même figure.
- 4) Soit $\mathcal{T} = \{M \in P \text{ tel que } 2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -26\}$ et $J = A * I$.
- a) Montrer que pour tout point du plan on a : $MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 26$.
- b) En déduire que pour tout point du plan on a : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 4\vec{AI} \cdot \vec{JM} - 26$.
- c) Déterminer \mathcal{T}

Exercice 5

Dans le plan on considère un triangle équilatéral ABC de coté 3.

Soit I le milieu de $[BC]$ et D la symétrique de C par rapport à B .

- 1) Calculer $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$; $\vec{DA} \cdot \vec{DC}$; $\vec{IA} \cdot \vec{IC}$ et $\vec{IB} \cdot \vec{IC}$.
- 2) Soit J le milieu de $[AD]$. Montrer que $\vec{AJ} \cdot \vec{AC} = 0$. Conclure.
- 3) Soit \mathcal{T} l'ensemble des points M du plan tel que $MC^2 - 2MB^2 = -9$
- a) Vérifier que A appartient à \mathcal{T} .
- b) Montrer que D est le barycentre des points pondérés $(C, 1)$ et $(B, -2)$
- c) Déterminer et construire l'ensemble \mathcal{T} .

Exercice 6

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$ avec $IB = IC = 2$; $IA = 3$ et $(\vec{IA}, \vec{IB}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

- 1) a) Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - IB^2$
- b) En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- 2) a) Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$
- b) En déduire AB et AC
- c) Donner la valeur exacte de $\cos(\widehat{AB, AC})$
- 3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)
- a) Montrer que : $AB^2 - AC^2 = 2\vec{BC} \cdot \vec{IH}$
- b) En déduire IH

Exercice 7

Soit ABC un triangle équilatéral direct tel que $AB = 2$ et $I = A * B$

- 1) Soit $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } \vec{BM} \cdot \vec{AC} = -2\}$
- a) Vérifier que $A \in \Delta$.
- b) Déterminer et construire Δ .
- 2) Déterminer $\mathcal{T} = \{M \in P \text{ tel que } \vec{MA} \cdot \vec{MB} = 2\}$
- 3) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$
- a) Calculer GA et GB

b) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + GA^2 + 3GB^2$

c) En déduire l'ensemble $E = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + 3MB^2 = 4\}$.

Exercice 8

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$$A(-1, 1) ; B(-2, 3) \text{ et } C\left(\frac{5}{2}, 4\right)$$

1) a) Calculer AB et AC

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et donner la valeur de : $\cos(\widehat{ABC})$

2) a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$, calculer GA et GB

b) Montrer que : $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$

c) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 = \frac{22}{3}$

Exercice 9

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$$A(2, 2) ; B(1, 1) \text{ et } C(4, 0)$$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

2) Calculer les distances AB , AC et BC

3) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et en déduire la valeur de $\cos(\widehat{ACB})$

4) On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et par $I = A * B$

a) Calculer les distances IH et AH

b) Déterminer les coordonnées du point H

Exercice 10

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$$A(4, 0) ; B(2, 2\sqrt{3}) \text{ et } C(0, -4)$$

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 8\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$

b) Vérifier que $CA = 4\sqrt{2}$ et $CB = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

c) Montrer que $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la valeur de \widehat{ACB}

2) a) Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

b) En déduire la nature du triangle ADB

3) a) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $E = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = 12\}$
déterminer alors E

b) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $F = \{M \in P / MA^2 + MC^2 = 20\}$
déterminer alors E