Produit scalaire dans le plan 3ème Sc Techniques

Exercice 1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A et tel que $AB = AC = 5$ $BC = 6$ et $I = B * C$.

1) **Faire une figure.**
2) **Calculer AI ; $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.**
3) a) **Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 7$.**

   b) **En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$**

Exercice 2

On considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2$ et $AD = 3$.

Soient les points E et F tel que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1) a) **Faire une figure.**

   b) **Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{FE}$.**
2) a) **Calculer $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CF}$.**

   b) **Montrer alors que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = 0$**

   c) **En déduire que $(DE) \perp (DF)$.**
3) **Soit $\mathcal{C}$= $\{M \in P$ tel que $MB^2 + 3ME^2 = 16\}$.**

   a) **Montrer que C est le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(E, 3)$.**

   b) **Montrer que pour tout point M du plan on a : $MB^2 + 3ME^2 = 4MC^2 + 12$.**

   c) **En déduire l'ensemble $\mathcal{C}$.**

Exercice 3

Soient A et B deux point du plan tel que $AB = 4$.

1) **Construire le point G barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 3)$.**
2) **Soit M un point du plan. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.**
3) **On pose $I = A * G$. Déterminer et construire les ensemble suivants :**

   a) $E = \{M \in P \text{ tel que } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MA} = 7\}$.

   b) $F = \{M \in P \text{ tel que } (\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{GA} = -18\}$.

Exercice 4

Soit un triangle ABC tel que $AB = 8$ et $AC = 6$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ et soit $I = B * C$.

1) **Faire une figure.**
2) **En utilisant la formule d'El Kashi montrer que $= 2\sqrt{13}$.**
3) **Soit $\mathcal{E}$= $\{M \in P$ tel que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 24\}$**

   a) **Montrer que $A \in \mathcal{E}$.**

b) Montrer que $\mathcal{E}$ est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{37}$.

c) Construire E dans le même figure.

4) Soit $\mathcal{C}= \{M \in P \text{ tel que } 2MA^2 - MB^2 - MC^2 = -26\}$ et $J = A * I$.

a) Montrer que pour tout point du plan on a : $MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 26$.

b) En déduire que pour tout point du plan on a : $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 4\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{JM} - 26$.

c) Déterminer $\mathcal{C}$

Exercice 5

Dans le plan on considère un triangle équilatéral ABC de coté 3.

Soit I le milieu de $[BC]$ et D le symétrique de C par rapport à B.

1) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$.

2) Soit J le milieu de $[AD]$. Montrer que $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AC} = 0$. Conclure.

3) Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des points M du plan tel que $MC^2 - 2MB^2 = -9$

a) Vérifier que A appartient à $\mathcal{C}$.

b) Montrer que D est le barycentre des points pondérés $(C\,,1)$ et $(B\,,-2)$

c) Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{C}$.

Exercice 6

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$ avec $IB = IC = 2$; $IA = 3$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}\,,\overrightarrow{IB}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$

b) En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) a) Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$

b) En déduire AB et AC

c) Donner la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right)$

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)

a) Montrer que : $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$

b) En déduire IH

Exercice 7

Soit ABC un triangle équilatéral direct tel que $AB = 2$ et $I = A * B$

1) Soit $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = -2\}$

a) Vérifier que $A \in \Delta$.

b) Déterminer et construire Δ.

2) Déterminer $\mathcal{C} = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2\}$

3) Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ et $(B\,,3)$

a) Calculer GA et GB

b) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + GA^2 + 3GB^2$

c) En déduire l'ensemble $E = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + 3MB^2 = 4\}$.

Exercice 8

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(-1\,,1)$; $B(-2\,,3)$ et $C\left(\frac{5}{2}\,,4\right)$

1) a) Calculer AB et AC

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et donner la valeur de : $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right)$

2) a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ et $(B\,,2)$, calculer GA et GB

b) Montrer que : $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$

c) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 = \frac{22}{3}$

Exercice 9

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(2\,,2)$; $B(1\,,1)$ et $C(4\,,0)$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

2) Calculer les distances AB, AC et BC

3) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et en déduire la valeur de $\cos(\widehat{ACB})$

4) On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et par $I = A * B$

a) Calculer les distances IH et AH

b) Déterminer les coordonnées du point H

Exercice 10

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(4\,,0)$; $B(2\,,2\sqrt{3})$ et $C(0\,,-4)$

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 8\sqrt{3}(1+\sqrt{3})$

b) Vérifier que $CA = 4\sqrt{2}$ et $CA = 4\sqrt{2+\sqrt{3}}$

c) Montrer que $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la valeur de $\widehat{ACB}$

2) a) Calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

b) En déduire la nature du triangle ADB

3) a) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $E = \{M \in P /\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = 12\}$

déterminer alors E

b) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $F = \{M \in P /\ MA^2 + MC^2 = 20\}$

déterminer alors E