Produit scalaire dans le plan 3ème Sc Expérimentales

Exercice 1

Une seule des réponses est exacte. Trouver cette réponse

1) $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan non nuls , l'expression $(\vec{u}.\vec{v}).\vec{w}$ désigne :

a) un nombre réel b) un vecteur colinéaire à $\vec{w}$ c) n'a pas de sens.

2) $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan non nuls tel que : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{w}$ alors on a nécessairement :

a) $\vec{v} = \vec{w}$ b) $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \perp \vec{w}$ c) $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$

3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls tel que $|\vec{u}.\vec{v}| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$ alors :

a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas collinaires.

Exercice 2

Soit OAB un triangle équilatéral de centre de gravité G et de coté $AB = 9$, on désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB)

1) a) Calculer OH puis OG.

b) Calculer $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}$

2) Calculer $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GA}.\overrightarrow{GB}$.

3) Montrer que $GO^2 + \overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GO}.\overrightarrow{GB} = 0$

Exercice 3

On considère un parallélogramme $ABCD$ tel que $AB = 5$; $AD = 4$ et $\widehat{BAD} = \frac{\pi}{3}$

Soit J le milieu de $[AD]$ et H le projeté orthogonal de D sur $[AB]$

1) Calculer $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB}$

2) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et en déduire AH

3) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = AD^2 - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}$

4) En déduire $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{DA}$ et $\cos(\widehat{ADB})$

5) a) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + MD^2 = 2MI^2 + 8$

b) Déterminer l'ensemble (C) des points M du plan tel que $MA^2 + MD^2 = 16$

Exercice 4

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$ avec $IB = IC = 2$; $IA = 3$ et $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{3}$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$

b) En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) a) Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$

b) En déduire AB et AC

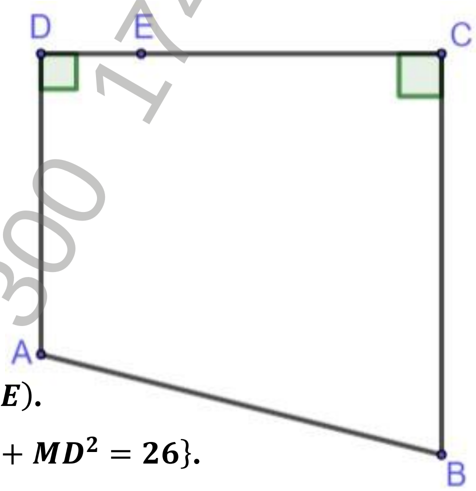
c) Donner la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)

a) Montrer que : $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$ b) En déduire IH

Exercice 5

On construit ci-contre un trapèze $ABCD$ rectangle en C et .E est un point du segment $[DC]$ tel que : $AD = 3$; $DE = 1$ et $DC = BC = 4$



1) Montrer que $(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$

2) a) Calculer $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{CB}$. En déduire que $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EB} = 9$

   b) Montrer que $EA = 10$ et $EB = 5$ puis calculer $\cos\widehat{AEB}$.

   c) Montrer que $AB = \sqrt{17}$

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC).

Montrer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 12$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CE} = 12$.En déduire que $(CA)\perp(BE)$.

4) Soit O le milieu du segment $[BD]$ et $\mathcal{C} = \{M \in P$ tel que $MB^2 + MD^2 = 26\}$.

   a) Vérifier que $A \in \mathcal{C}$.

   b) Montrer que pour tout $M \in P$; on a : $MB^2 + MC^2 = 2MO^2 + \frac{MD^2}{2}$

   c) Déduire l'ensemble $\mathcal{C}$.

5) Soient les points F et G tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

On considère le repère orthonormé directe $(A, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$ et on posant M de coordonnées (x, y).

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble $\mathcal{C}$.

Exercice 6

Soit $AICJ$ est un rectangle tel que $AC = 4\sqrt{3}$ et B un point de $[IA]$ tel que $AB = BC = 4$

1) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -8$

2) En déduire que $\cos\widehat{BAC} = -\frac{1}{2}$ et que $BI = 2$

3) Montrer que $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CI} = 121$ et $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CJ} = 12$.

4) En déduire que $(CB) \perp (IJ)$

5) Soient $\Delta = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = 32\}$ et $\Gamma = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 64\}$.

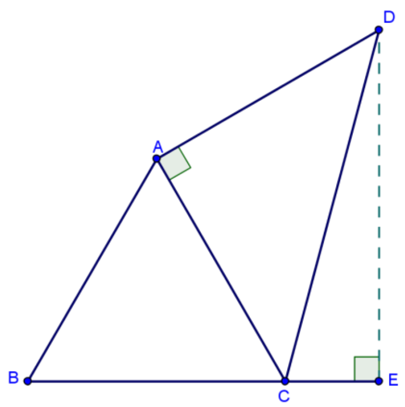
   a) Montrer que $M \in \Delta$ signifie que $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AB} = 16$ avec $O = A * B$.

   b) Montrer que $C \in \Delta$ puis déterminer Δ.

   c) Montre que Γ est le cercle de centre O passant par C.

Exercice 7

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2 et ACD un triangle isocèle rectangle en A. (voir figure)



1) Montrer que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB} = -2\sqrt{3}$

   b) Montrer que $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

   c) Montrer alors que $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CB} = 2(1 - \sqrt{3})$

   d) En déduire que $CE = \sqrt{3} - 1$

   e) Montrer que $DE = \sqrt{3} + 1$

2) Soit O le milieu de $[BC]$et F le point de $[OA]$ tel que $OF = 1$

a) Déterminer les coordonnées des points A, B, E et D dans le repère $\left(O\,,\overrightarrow{OC}\,,\overrightarrow{OF}\right)$

b) Montrer alors que $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$

3) Soient $\Delta = \left\{M \in P / MC^2 - MB^2 = -4\sqrt{3}\right\}$ et $\Gamma = \left\{M \in P / MC^2 + MB^2 = 8\right\}$

a) Montrer que $M \in \Delta$ équivaut à $2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{BC} = -4\sqrt{3}$

b) Vérifier que $E \in \Delta$

c) Montrer $\Delta = (DE)$

d) Montrer Γ que est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

Exercice 8

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(-1\,,1)$, $B(-2\,,3)$ et $C\left(\frac{5}{2}\,,4\right)$

1) a) Calculer AB et AC

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et donner la valeur de : $cos\left(\widehat{BAC}\right)$

2) a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ et $(B\,,2)$, calculer GA et G

b) Montrer que : $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$

c) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 = \frac{22}{3}$

Exercice 9

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(2\,,2)$; $B(1\,,1)$ et $C(4\,,0)$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

2) Calculer les distances AB, AC et BC

3) Calculer $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\widehat{ACB}\right)$

4) On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et par $I = A * B$

a) Calculer les distances IH et AH

b) Déterminer les coordonnées du point H.

Exercice 10

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(4\,,0)$; $B\left(2\,,2\sqrt{3}\right)$ et $C(0\,,-4)$

1) a) Vérifier que $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 8\sqrt{3}\left(1 + \sqrt{3}\right)$

b) Vérifier que $CA = 4\sqrt{2}$ et $CA = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

c) Montrer que $\cos\left(\widehat{ACB}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la valeur de $\widehat{ACB}$

2) a) Calculer $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AB}$

b) En déduire la nature du triangle ADB

3) a) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $E = \left\{M \in P / \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AC} = 12\right\}$

déterminer alors E

b) **Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $F = \{M \in P /\ MA^2 + MC^2 = 20\}$**

déterminer alors E

Exercice 11

Soit $ABCD$ est un carré de côté 3.

On désigne par E et F les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DF} = -6$ et $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{DF} = -6$

b) En déduire que les droites (DE) et (DF) sont perpendiculaires.

2) a) Montrer que $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FA} = 28$

b) Calculer les distance FE et FA . En déduire $\cos E\widehat{F}A$.

3) On désigne par I le milieu de $[EF]$.

Soit $\Gamma = \{M \in P$ tel que $\overrightarrow{ME}.\overrightarrow{MF} = 6\}$

a) Montrer que Γ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

b) Montrer que $\in \Gamma$. Construire alors Γ.

c) La droite (AF) recoupe Γ en , soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle Γ.Montrer que $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FH} = -6$

4) Soit $\mathcal{E}_k = \{M \in \mathcal{P} / 5MC^2 - 2MB^2 = k\}$, où k est un paramètre réel.

a) Vérifier que F est le barycentre des points pondérés $(C, 5)$ et $(B, -2)$

b) Discuter selon k la nature de l'ensemble $\mathcal{E}_k$.

5) Soit N un point de (AD) et N' le point de (DC) vérifiant $\overrightarrow{EN}.\overrightarrow{EN'} = -DE^2$

On pose $J = N * N'$

a) Montrer que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DJ} = DE^2$.

b) En déduire que lorsque N varie sur (AD) , J varie sur une droite Δ que l'on précisera.

c) Pour quelle valeur de k , Δ est elle tangente à $\mathcal{E}_k$?