Produit scalaire dans le plan 3ème Sc Techniques

Exercice 1

Dans la figure ci-contre, ABCD est un rectangle tel que AB=2 et AD =3.

E est le point de [BC[et F est le point de [CB[tel que CE=BF=1.

1) *Calculer* $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BD}$; $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{FD}.\overrightarrow{FE}$
2) *a/Calculer* $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{ED}.\overrightarrow{CF}$

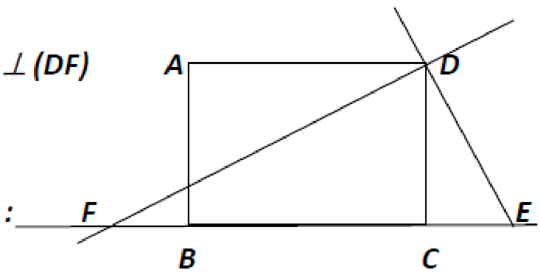
   b/Montrer alors que $\overrightarrow{DE}.\overrightarrow{DF} = 0$ *et que (DE)* $\perp$ *(DF)*
3) *Soit* $\xi = \{ M \in P \,;\, MB^2+3ME^2 = 16\}$

   a/Vérifier que $\overrightarrow{CB} + 3\overrightarrow{CE} = \vec{0}$

   b/Montrer que pour tout point du plan , on a :

   $MB^2+3ME^2 = 4MC^2+12$

   c/En déduire l'ensemble ξ.



Exercice 2

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A ; tels que $AB = AC = 5$, $BC = 6$ et $I = B * C$

1) Calculer : AI , $\overrightarrow{IB}\cdot\overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}$.
2) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7$

   b) En déduire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AC}}\right)$.

Exercice 3

Soient A et B deux points du plan tel que $AB = 4$

1) Construire le point G, barycentre des points pondérés $(A,1)$ et $(B,3)$.
2) Soit M un point du plan. Exprimer $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MG}$.
3) On pose $I = A * G$. Déterminer et construire les ensembles :

$$E = \left\{ M \in P \;;\; \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{MA} = 7 \right\}$$

$$F = \left\{ M \in P \;;\; \left(\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right)\cdot\overrightarrow{GA} = -18 \right\}$$

Exercice 4

Dans le plan on considère un triangle équilatéral ABC de côté 3.

Soit I le milieu de [BC] et D le symétrique de C par rapport à B.

1) *Calculer* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IC}$ *et* $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC}$.
2) *Soit J le milieu de [AD]. Montrer que :* $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{AC} = 0$. *Déduire*
3) *Soit* $\mathscr{E}$ *l'ensemble des points M du plan tels que* $MC^2 - 2MB^2 = -9$
   a) *Vérifier que A appartient à* $(\mathscr{E})$
   b) *Montrer que D est le barycentre des points pondérés (C,1) et (B,–2)*
   c) *Déterminer et construire l'ensemble* $(\mathscr{E})$

Exercice 5

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$ avec $IB = IC = 2$; $IA = 3$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{IA}\,,\overrightarrow{IB}}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$

b) En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

2) a) Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$

b) En déduire AB et AC

c) Donner la valeur exacte de $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right)$

3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)

a) Montrer que : $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{IH}$

b) En déduire IH

Exercice 6

Soit ABC un triangle équilatéral direct tel que $AB = 2$ et $I = A * B$

1) Soit $\Delta = \left\{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = -2\right\}$

a) Vérifier que $A \in \Delta$.

b) Déterminer et construire Δ.

2) Déterminer $\mathcal{C} = \left\{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 2\right\}$

3) Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ et $(B\,,3)$

a) Calculer GA et GB

b) Montrer que pour tout point M du plan on a : $MA^2 + 3MB^2 = 4MG^2 + GA^2 + 3GB^2$

c) En déduire l'ensemble $E = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + 3MB^2 = 4\}$.

4) Soit $E_k = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = k\}$; $k \in \mathbb{R}$.

a) Caractériser E_k suivant les valeurs de k.

b) Trouver k pour que $E_k = \mathcal{C}$.

Exercice 7

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(-1\,,1)$; $B(-2\,,3)$ et $C\left(\frac{5}{2}\,,4\right)$

1) a) Calculer AB et AC

b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ et donner la valeur de : $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}}\right)$

2) a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ et $(B\,,2)$, calculer GA et GB

b) Montrer que : $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$

c) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 = \frac{22}{3}$