Primitives 4ème Mathématiques

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 4}{x^2}$

1) **Montrer que f admet au moins une primitive F sur $]0, +\infty[$**

2) **Déterminer la fonction F tel que $F(1) = 0$**

Exercice 2

Soit les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\cos x$ et $g(x) = x\sin x$.

1) **a) Calculer $f'(x) + g(x)$,**

b) En déduire une primitive G de g sur $\mathbb{R}$.

2) **a) Calculer $f(x) - g'(x)$,**

b) En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

1) **Montrer f admet une unique primitive F sur I tel que $F(0) = 0$**

2) **On pose $\forall x \in I$; $h(x) = F(-x) + F(x)$.**

a) Montrer que $\forall x \in I$ on a : $h'(x) = 0$

b) En déduire $h(x)$

c) Montrer alors que la fonction F est impaire

3) **Soit G la fonction définie sur $J = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(\sin(x))$**

a) Montrer que G est dérivable sur J et déterminer $G'(x)$

b) En déduire que $\forall x \in J$ on a : $G(x) = x$

c) Calculer : $F\left(\frac{1}{2}\right)$; $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 4

Soit la fonction h définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \tan x$

1) **a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.**

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $(h^{-1})'(x)$ pout tout $x \in \mathbb{R}$

2) **Soit g la restriction de h^{-1} à l'intervalle $]0, +\infty[$; et soit u la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $u(x) = g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right)$.**

a) Montrer que u est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $u'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

c) En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

3) Soit la fonction v définie sur $[0\,,+\infty[$ par $v(x) = x - g(x)$

a) Calculer $v'(x)$ pour tout $x \in [0\,,+\infty[$

b) Calculer $v(0)$ et $v'(0)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[-2\,,2]$ par : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

1) a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2\,,2]$

b) Soit F la primitive de f sur $[-2\,,2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.

2) Soit G_1 la fonction définie sur $[0\,,\pi]$ par $G_1(x) = F(2\cos x)$ et (C) sa courbe représentative.

a) Calculer $G_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}\,,0\right)$ est un centre de symétrie de (C).

c) Montrer que G_1 est dérivable sur $[0\,,\pi]$ et que $\forall x \in [0\,,\pi]$ on a : $G_1{}'(x) = -4sin^2x$.

3) a) En déduire que $\forall x \in [0\,,\pi]$ on a : $G_1(x) = \pi - 2x + \sin 2x$.

b) Etudier les variations de G_1.

c) Calculer $F(1)$; $F(2)$; $F(\sqrt{2})$ et $F(\sqrt{3})$.

4) Soit G_2 la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ par $G_2(x) = F(2\sin x)$ et (C') sa courbe représentative.

a) Etudier la parité de G_2.

b) Montrer que G_2 est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $G'_2(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right]$. $G_2(x) = 2x + \sin 2x$.

d) Retrouver $F(1)$; $F(2)$; $F(\sqrt{2})$ et $F(\sqrt{3})$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) Montrer que f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$ et soit C_F sa courbe représentative.

2) a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_F au point d'abscisse 0.

b) Donner le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = F(x) - x$.

c) Etudier la position relative de C_F et T pour $x \geq 0$.

3) Montrer que F est impaire.

4) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $H(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que H est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

b) En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $H(x) = 2F(1) - F(x)$ et que F admet une limite finie α en $+\infty$.

5) Soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(\tan x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G(x) = x$. Donner la valeur de α.

6) Dresser le tableau de variation de F puis tracer T et C_F.

7) On pose pour tout $\in \mathbb{R}_+$; $U(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$.

a) Montrer que U est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et calculer $U'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) En déduire la valeur du réel $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 7

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Etudier la dérivabilité de f à droit en 0

c) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer pour tout x de $]0, 1[$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition J

b) Déterminer $f^{-1}(1)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

d) Tracer les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans le même repère

3) Soit F la primitive de f sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0

On considère la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = F(sin^2 x)$

a) Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $g(x) = x - \frac{1}{2}\sin 2x$

c) Calculer alors $F\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par : $f(x) = x^2 - \sqrt{4 - x^2}$.

1) a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2, 2]$

b) Soit F la primitive de f sur $[-2, 2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = F(2\cos x)$ et soit C_g sa courbe représentative.

a) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C_g.

b) Montrer que g est dérivable sur $[0, \pi]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

c) En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$ on a : $g(x) = 2x + \frac{8}{3}cos^3 x - \sin 2x - \pi$

d) Calculer $F(1)$ et $F(2)$.

Exercice 9

1) Soit u la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : $u(x) = 2\cos x - 1$.

Dresser le tableau de variation de u.

2) Soit f la fonction définie sur $]-3, 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer C_f (unité graphique 2 cm).

3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[-1, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4) Soit F la primitive de f sur $]-3, 1[$ qui s'annule en 0 et G la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : $G(x) = (F \circ u)(x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in]0, \pi[$.

b) Calculer $G\left(\frac{\pi}{3}\right)$; en déduire que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a : $G(x) = \frac{\pi}{3} - x$.

c) Calculer $F(-1)$ et $F(\sqrt{2} - 1)$.

Exercice 10

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2-4x+5}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de C_f

2) Soit F la primitive de f sur IR qui s'annule en 2 et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $G(x) = F(4 - x) + F(x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que le point $I(2, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$.

3) Soit la fonction H définie sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = F(2 + \tan x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que $H(x) = x$ puis calculer $F(1)$.