

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x^4 - 2x^2 + 4}{x^2}$

- 1) Montrer que f admet au moins une primitive F sur $]0, +\infty[$
- 2) Déterminer la fonction F tel que $F(1) = 0$

Exercice 2

Soit les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x \cos x$ et $g(x) = x \sin x$.

- 1) a) Calculer $f'(x) + g(x)$,
b) En déduire une primitive G de g sur \mathbb{R} .
- 2) a) Calculer $f(x) - g'(x)$,
b) En déduire une primitive F de f sur \mathbb{R} .

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $I =]-1, 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

- 1) Montrer f admet une unique primitive F sur I tel que $F(0) = 0$
- 2) On pose $\forall x \in I ; h(x) = F(-x) + F(x)$.
a) Montrer que $\forall x \in I$ on a : $h'(x) = 0$
b) En déduire $h(x)$
c) Montrer alors que la fonction F est impaire
- 3) Soit G la fonction définie sur $J =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $G(x) = F(\sin(x))$
a) Montrer que G est dérivable sur J et déterminer $G'(x)$
b) En déduire que $\forall x \in J$ on a : $G(x) = x$
c) Calculer : $F\left(\frac{1}{2}\right)$; $F\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

- 1) a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2, 2]$
b) Soit F la primitive de f sur $[-2, 2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F .
- 2) Soit G_1 la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $G_1(x) = F(2 \cos x)$ et (C) sa courbe représentative.
a) Calculer $G_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
b) Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de (C) .
c) Montrer que G_1 est dérivable sur $[0, \pi]$ et que $\forall x \in [0, \pi]$ on a : $G_1'(x) = -4 \sin^2 x$.
- 3) a) En déduire que $\forall x \in [0, \pi]$ on a : $G_1(x) = \pi - 2x + \sin 2x$.
b) Etudier les variations de G_1 .

c) Calculer $F(1)$; $F(2)$; $F(\sqrt{2})$ et $F(\sqrt{3})$.

4) Soit G_2 la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $G_2(x) = F(2 \sin x)$ et (C') sa courbe représentative.

a) Etudier la parité de G_2 .

b) Montrer que G_2 est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $G'_2(x)$ pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) En déduire que pour tout $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $G_2(x) = 2x + \sin 2x$.

d) Retrouver $F(1)$; $F(2)$; $F(\sqrt{2})$ et $F(\sqrt{3})$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1) Montrer que f admet une unique primitive F sur \mathbb{R} tel que $F(0) = 0$ et soit C_F sa courbe représentative.

2) a) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe C_F au point d'abscisse 0.

b) Donner le sens de variation de la fonction g définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = F(x) - x$.

c) Etudier la position relative de C_F et T pour $x \geq 0$.

3) Montrer que F est impaire.

4) Soit H la fonction définie sur \mathbb{R}_+^* par : $H(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)$

a) Montrer que H est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

b) En déduire de pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $H(x) = 2F(1) - F(x)$ et que F admet une limite finie α en $+\infty$.

5) Soit G la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $G(x) = F(\tan x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) En déduire que $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $G(x) = x$. Donner la valeur de α .

6) Dresser le tableau de variation de F puis tracer T et C_F .

7) On pose pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; $U(x) = F\left(\frac{1}{x+1}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$.

a) Montrer que U est dérivable sur \mathbb{R}_+ et calculer $U'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

a) En déduire la valeur du réel $F\left(\frac{1}{2}\right) + F\left(\frac{1}{3}\right)$.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0

c) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer pour tout x de $]0, 1[$

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} dont on déterminera le domaine de définition J

b) Déterminer $f^{-1}(1)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

d) Tracer les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$ de f^{-1} dans le même repère

3) Soit F la primitive de f sur $[0, 1[$ qui s'annule en 0

On considère la fonction g définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = F(\sin^2 x)$

- Montrer que g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $g(x) = x - \frac{1}{2} \sin 2x$
- Calculer alors $F\left(\frac{1}{2}\right)$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[-2, 2]$ par : $f(x) = x^2 - \sqrt{4 - x^2}$.

- Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-2, 2]$
 - Soit F la primitive de f sur $[-2, 2]$ qui s'annule en 0. Etudier la parité de F .
- Soit g la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = F(2 \cos x)$ et soit C_g sa courbe représentative.
 - Montrer que le point $I\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de C_g .
 - Montrer que g est dérivable sur $[0, \pi]$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$.
 - En déduire que pour tout $x \in [0, \pi]$ on a : $g(x) = 2x + \frac{8}{3} \cos^3 x - \sin 2x - \pi$
 - Calculer $F(1)$ et $F(2)$.

Exercice 8

1) Soit u la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : $u(x) = 2 \cos x - 1$.

Dresser le tableau de variation de u .

- Soit f la fonction définie sur $] -3, 1[$ par : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}$ et soit C_f sa courbe représentative.
 - Dresser le tableau de variation de f .
 - Tracer C_f (unité graphique 2 cm).
- Soit g la restriction de f à l'intervalle $[-1, 1[$.
 - Montrer que g réalise une bijection de $[-1, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - Calculer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- Soit F la primitive de f sur $] -3, 1[$ qui s'annule en 0 et G la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : $G(x) = (F \circ u)(x)$.
 - Montrer que G est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in]0, \pi[$.
 - Calculer $G\left(\frac{\pi}{3}\right)$; en déduire que pour tout $x \in]0, \pi[$ on a : $G(x) = \frac{\pi}{3} - x$.
 - Calculer $F(-1)$ et $F(\sqrt{2} - 1)$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- Déterminer le domaine de définition de f
 - Montrer que la droite d'équation $x = 2$ est un axe de symétrie de C_f
- Soit F la primitive de f sur \mathbb{R} qui s'annule en 2 et soit \mathcal{C} sa courbe représentative.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose : $G(x) = F(4 - x) + F(x)$.

- a) Montrer que G est dérivable sur \mathbb{R} et calculer $G'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
 - b) Montrer que le point $I(2, 0)$ est un centre de symétrie de \mathcal{C} .
- 3) Soit la fonction H définie sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par $H(x) = F(2 + \tan x)$.
- a) Montrer que H est dérivable sur $\left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ et calculer $H'(x)$ pour tout $x \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.
 - b) En déduire que $H(x) = x$ puis calculer $F(1)$.

**Si les gens ne croient pas que les mathématiques sont simples,
c'est uniquement parce qu'ils ne réalisent pas à quel point la vie est complexe**
John Neumann