

Exercice 1

Répondre par Vrai ou Faux

Soient les polynômes $P(x) = x^3 - 3x + 2$ et $Q(x) = 4x^5 - 3x^4 + x^2$

- a) 1 est une racine commune aux deux polynômes P et Q .
- b) Le degrés du polynôme $P(x) + Q(x)$ est égale à 8.
- c) Le degrés du polynôme $P(x) \times Q(x)$ est égale à 15.

Exercice 2

Soit le polynôme $P(x) = 4x^3 + 5x^2 - 2x - 3$.

- 1) Vérifier que -1 est une racine de P .
- 2) Déterminer trois réels a , b , et c tel que $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.
- 3) Résoudre alors l'équation $P(x) = 0$.

Exercice 3

Soient les polynômes $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ et $Q(x) = x^2 + x - 6$

- 1) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $Q(x) = 0$
- 2) a) Montrer que 2 est une racine de $P(x) = 0$
- b) Déterminer trois réels a ; b et c tel que $P(x) = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$
- c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$
- 3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = Q(x)$
- 4) Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
 - a) Déterminer le domaine de définition de f
 - b) Simplifier l'expression de $f(x)$
 - c) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 4

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$.

- 1) a) Calculer $P(1)$
- b) Déterminer trois réels a , b , et c tel que $P(x) = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
- 2) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.
- 3) a) Dresser le tableau de signe de $P(x)$.
- b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $P(x) \leq 0$.

4) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\frac{1}{P(x)} \geq 0$

Exercice 5

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - x^3 - 11x^2 + 9x + 18$.

1) a) Calculer $P(-1)$ et $P(2)$

b) Déterminer le polynôme G tel que $P(x) = (x + 1)(x - 2)G(x)$.

2) a) Factoriser $P(x)$.

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$; puis l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Exercice 6

Soit le polynôme $P(x) = 2x^2 - 7x - 15$

1) a) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $P(x) = 0$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation : $P(x) < 0$

c) Déterminer le signe de $P\left(-2 - \frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)$

2) Soit $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 - 22x - 15$

a) Vérifier que -1 est une racine de Q .

b) Factoriser alors $Q(x)$.

c) Résoudre dans \mathbb{R} ; $Q(x) = 0$ puis $Q(|x|) \geq 0$.

3) Comparer $Q(-2^{2025})$ et $P(-2^{2025})$

Exercice 7

Pour chaque proposition, trouver la seule bonne réponse :

1) Soit $f(x) = x^3 - 4x^2 + |x| - 1$ $x \in \mathbb{R}$ est une fonction :

a) polynôme

b) rationnelle

c) ni polynôme ni rationnelle

2) Soit P , Q et R trois polynôme tel que $P(x) = Q(x) \times R(x)$ si $d^\circ(P) = 5$ et $d^\circ(Q) = 2$

alors $d^\circ(R) =$

a) 10

b) 7

c) 3

3) Le polynôme $3x^3 - 6x^2 + x + 2$ est factorisable par :

a) $x - 1$

b) $x + 1$

c) $x - 2$

4) Soit $f(x) = \frac{2x+3}{2x^2+8}$, le domaine de définition de f est :

a) $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

b) $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

c) \mathbb{R}

Exercice 8

Soit le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12$

1) Vérifier que 2 est une racine de P , puis factoriser P .

2) Soit $f(x) = \frac{P(x)}{x^2 - x - 2}$

a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b) Montrer que pour tout réel x de D ; $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 1}$

3) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $f(x) \geq 0$.

Exercice 9

Soit les polynômes $P(x) = -2x^2 - 3x + 5$ et $Q(x) = x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$

1) a) Déterminer les racines du polynôme P .

b) Vérifier que 1 et -2 sont des racines de Q .

c) En déduire la factorisation de Q en produit de binômes de 1^{er} degré.

2) Soit la fonction rationnelle définie par $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Simplifier $f(x)$.

3) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $g(x) = \sqrt{f(x)}$

Exercice 10

Soit le polynôme $P(x) = -2x^4 + 2x^3 + 26x^2 - 2x - 24$

1) a) Montrer que 1 et -3 sont deux racines de P .

b) Déterminer un polynôme Q tel que $P(x) = (x - 1)(x + 3)Q(x)$.

2) On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{P(x)}{-2x^2 - x + 15}$

a) Déterminer le domaine de définition de f .

b) Simplifier $f(x)$.

3) Résoudre alors $f(x) \geq 0$

Exercice 11

1) Soit $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$

a) Vérifier que -2 est une racine de f

b) Déduire que $f(x) = (x + 2)(ax^2 + bx + c)$ où a , b , et c sont des réels à déterminer

c) Résoudre dans \mathbb{R} $f(x) \geq 0$

d) Déduire le domaine de définition de la fonction $R(x) = \sqrt{f(x)}$

2) a) Développer et réduire le polynôme $(x + a)(x^2 + 1)$

b) Factoriser alors $g(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2$

3) Soit $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction h

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ on a $h(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x^2+1}$

c) Résoudre dans \mathbb{R} $h(x) \leq 1$

Exercice 12

Soit le polynôme P définie par : $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

1) a) Calculer $P(2)$

b) Déterminer le polynôme Q tel que $P(x) = (x - 2)Q(x)$

c) Vérifier que $-\frac{1}{2}$ et 3 sont les racines de Q

2) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 12 - 6x$

3) Soit $f(x) = \frac{P(x)}{-x^2+7x-10}$

a) Déterminer l'ensemble de définition D_f de f

b) Vérifier que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = \frac{2x^2-5x-3}{5-x}$

4) a) Déterminer le signe de $f(x)$

b) Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation $\sqrt{f(x)} \geq \sqrt{-x}$

Exercice 13

Soit le polynôme $P(x) = \frac{x(x+1)}{2}$

1) a) Montrer que pour tout réel x on a : $P(x) - P(x - 1) = x$.

b) En déduire de ce qui précède $A = 1 + 2 + 3 + 4$ et $B = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

2) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 14

On considère les polynômes A et P définis par :

$A(x) = 4x^4 - 13x^2 + 9$ et $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x - 6$

1) a) Factoriser le trinôme $4x^2 - 13x + 9$

b) En déduire la factorisation de $A(x)$ en produits de quatre facteurs

2) a) Vérifier que (-1) est une racine de P

- b)** En déduire que $P(x) = (x + 1) \times R(x)$ où R est un polynôme que l'on déterminera
- 3)** Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{A(x)}{P(x)}$
- a)** Déterminer le domaine de définition D_f de f puis simplifier $f(x)$
- b)** Résoudre dans $f(x) \geq 0$ puis $\sqrt{f(x)} = 2\sqrt{x-1}$

Exercice 15

On considère les polynômes T et P définis par :

$$T(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad \text{et} \quad P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 8x + 12$$

- 1) a)** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $T(x) = 0$
- b)** Déduire une factorisation de $T(x)$
- c)** Vérifier que T et P ont une racine commune
- d)** Factoriser alors $P(x)$
- 2) a)** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $2x^2 - 8 = 3x - \frac{12}{x}$
- b)** Résoudre dans \mathbb{R} les inéquations $T(x) \geq 0$ et $\sqrt{T(x)} < x - 2$
- 3)** Soit la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{4x-8}{P(x)+T(x)}$
- a)** Déterminer le domaine de définition D_f de f
- b)** Pour tout $x \in D_f$, simplifier $f(x)$ et vérifier que $f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}$
- c)** Pour tout entier naturel $n \geq 3$, calculer :
- $$S_n = f(3) + f(4) + f(5) + \dots + f(n)$$
- en fonction de n

Exercice 16

Soit le polynôme $P(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$.

- 1)** Calculer $P(-1)$; $P(1)$ et $P(2)$.
- 2)** Montrer que pour tout réel x ; on a $P(x+1) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$
- 3)** En déduire que pour tout réel x ; on a $P(x+1) - P(x) = x^3$
- 4)** En déduire que pour tout entier $n \geq 2$; on a : $1^3 + 2^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$