

Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

- 1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{8-i}{1-2i}$; $\frac{10}{3-i}$ et $\left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2$
- 2) Marquer les points A, B et C d'affixes respectives : $2+3i$, $3+i$ et $-1-i$
- 3) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en B .
 b) Trouver l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle.
- 4) a) On pose $I = A * C$, trouver l'affixe du point I .
 b) Déterminer et construire les ensembles suivants :
 $E = \{M(z) \in P / |z - 2 - 3i| = |z + 1 + i|\}$ et $F = \{M(z) \in P / |2\bar{z} - 1 + 2i| = 5\}$

Exercice 2

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \frac{3+i}{1+i}$ et $z_B = (-3+4i)\left(\frac{1-2i}{5}\right)$

- 1) Ecrire z_A et z_B sous la forme algébrique.
- 2) Placer les points A et B .
- 3) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle
- 4) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.

Exercice 3

Soient les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$.

- 1) a) placer les points A, B, C et I .
 b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$.
- 2) Montrer que le triangle ABC est isocèle.
- 3) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que $ABCD$ soit un losange.
- 4) a) A tout point M d'affixe $z \neq 4+2i$ on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{2z+4i}{z-4-2i}$

Montrer que : $OM' = \frac{2AM}{CM}$

- b) Montrer que si le point M décrit la médiatrice du segment $[AC]$ alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice 4

- 1) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives : i ; $1-i$; $5+i$ et $4+3i$
- 2) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.
- 3) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1-i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$
 a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors M appartiendra à une droite que l'on précisera.

4) a) Montrer que $(z' - i)(z - 1 + i) = 2 + i$ et que $AM' \times BM = \sqrt{5}$

b) Montre que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 5

Ecrire les complexes suivants sous forme trigonométrique $z_1 = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$ où $\alpha \in [0, \pi[$

$z_2 = -1 + \cos \beta + i \sin \beta$ où $\beta \in]0, \pi[$ $z_3 = \sin \theta + i \cos \theta$ $z_4 = 3 - i\sqrt{3}$ $z_5 = 2\sqrt{3} + 2i$

Exercice 6

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + 4i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = -i$

1) a) Placer les points A, B et C .

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

2) Soit le point E d'affixe $z_E = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner le module et un argument des complexes z_B et z_E .

b) Déduire le module et un argument de $z_B z_E$.

c) Ecrire sous forme algébrique le complexe : $z_B z_E$.

d) En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z + i| = |z|$.

Exercice 7

1) On donne $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i$.

a) Ecrire z_1, z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique de $Z = \frac{z_1^2 \times z_2^2}{z_3^3}$

2) a) Ecrire Z sous forme algébrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

Exercice 8

On pose $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = 1 + i$

1) Ecrire sous la forme algébrique $u \times v$.

2) a) Ecrire u et v sous la forme exponentielle.

b) Ecrire $u \times v$ sous la forme exponentielle.

3) En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

Exercice 9

Soient les points $(2i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ tel que $z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$

1) On pose $z = x + iy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

a) Montrer que $Im(z) = \frac{2x^2 + 2y^2 + y - 10}{x^2 + (y-2)^2}$

b) Déterminer alors l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit un réel.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|2\bar{z} + 4i| = 6$.

3) a) Montrer que $(z' - 2i)(z - 2i) = -9$

b) Montrer que $AM' \times AM = 9$

c) Montrer que $(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que $\arg(z' - 2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10

1) Soit $Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$; écrire Z sous la forme exponentielle.

2) Ecrire Z sous forme algébrique et en déduire $\tan \frac{\pi}{12}$

Exercice 11

Soient les points A et B d'affixes respectives $a = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $b = ia$.

1) Justifier que les points A et B appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

2) a) Ecrire a et b sous la forme exponentielle.

b) Placer les points A et B .

c) Montrer que triangle OAB est isocèle en O .

3) Soit le point M d'affixe $z = a + b$

a) Montrer que $OAMB$ est un carré.

b) Déterminer le module et un argument de z .

c) Ecrire z sous la forme algébrique puis déduire que $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice 13

Soient les points A, B et I d'affixes respectives : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)i$.

1) a) Mettre z_A et z_B sous la forme exponentielle

b) Justifier que les points A et B appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 2.

c) Vérifier que le point I est le milieu du segment $[AB]$.

d) Placer les points A, B et I .

2) a) Justifier que la demi-droite $[OI)$ est la bissectrice de l'angle \widehat{AOB} .

b) Vérifier que $(\widehat{OA, OB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

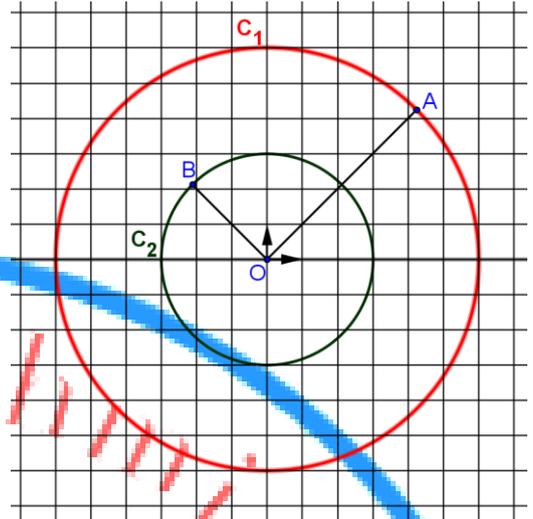
c) Montrer que $(\widehat{OI, OA}) \equiv \frac{5\pi}{12} [2\pi]$.

d) En déduire que $z_I = \sqrt{2 + \sqrt{3}} \left[\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right) + i \sin \left(\frac{5\pi}{12} \right) \right]$ et que

e) Déterminer les valeurs exactes de $\cos \left(\frac{5\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{5\pi}{12} \right)$.

Exercice 14

Dans la figure ci-contre on a construit un cercle C_1 de centre O et de rayon 6 et un cercle C_2 de centre O de rayon 3 ; le point $A \in C_1$ et le point $B \in C_2$.



1) Soient z_A et z_B les affixes respectives des point A et B .

a) Donner le module et un argument de z_A et z_B .

b) En déduire que $z_A = 3\sqrt{2}(1+i)$ et que $z_B = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

2) a) Placer le point C d'affixe $z_C = 3i\sqrt{2}$

b) Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_A}$ est un réel.

c) Calculer $\frac{z_B}{z_A}$

3) En déduire que le quadrilatère $OACB$ est un trapèze rectangle.

Exercice 15

On considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i .

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $\text{Aff}(\overline{EM})$ et $\text{Aff}(\overline{FN})$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2

c) Montrer les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P , tel que $z_P = (1 - i) \sin \theta \times e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{\text{Aff}(\overline{EP})}{\text{Aff}(\overline{EM})} = \sin \theta - \cos \theta$ et calculer $\frac{\text{Aff}(\overline{FP})}{\text{Aff}(\overline{FN})}$

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN) .

Exercice 17

Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$

1) Placer A et B .

2) Qu'elle est la nature du triangle OAB .

3) Soit le point C d'affixe $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(2 - 2i)$.

a) Ecrire z_C sous forme algébrique.

b) Ecrire $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2 - 2i$ sous forme trigonométrique.

4) a) Ecrire z_C sous forme trigonométrique.

b) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$

5) a) Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$.

b) En déduire la nature du triangle OAC .

- 6) On pose $z = x + iy$ déterminer (de deux manières) et construire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que :
 $|-i\bar{z} - 2 + 2i| = |z - 2 + 2i|$
- 7) On pose $z = 2 + 2i \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$. Qu'elle est l'ensemble des points M lorsque θ décrit $[0, \pi]$.

Exercice 18

- 1) Ecrire sous la forme algébrique $\frac{-11-2i}{1+2i}$ et $3i \left(-ie^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6$
- 2) a) placer les points $A(-3 + 4i)$ et $B(3)$
 b) Trouver l'affixe du point I milieu de $[AB]$
 c) Soit C le point d'affixe $2 - i$. Montrer que ABC est un triangle rectangle en C
 d) En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle ζ dont on déterminera
 e) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z) / |z - 2i| = \sqrt{13}\}$
- 3) Soit M le point d'affixe $z = 1 + 2i + e^{i\theta}$; $\theta \in [0, 2\pi[$
 Déterminer l'ensemble des point M , lorsque θ décrit $[0, 2\pi[$

Exercice 19

On donne les points A et B d'affixes respectives $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$

- 1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle
- 2) Ecrire $z_1 z_2$ sous la forme exponentielle et en déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
- 3) A tout point $M \in P \setminus \{B\}$ et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-z_1}{z-z_2}$
 a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tel que z' soit imaginaire pur
 b) Déterminer et construire l'ensemble F des points M tel que z' soit réel
 c) Déterminer l'ensemble G des points M tel que $|z'| = 1$
- 4) Soit I le point d'affixe 1. Montrer que pour tout point $M \in P \setminus \{B\}$, $IM' \times BM = 1 + \sqrt{3}$
 Que décrit le point M' lorsque M décrit le cercle de centre B et de rayon 1

Exercice 20

Soient les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

- 1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique
- 2) Placer alors les points A, B et C d'affixes respectives $2, z_1$ et z_2
- 3) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point $I = A * B$
- 4) Calculer OI et une mesure de (\vec{u}, \vec{OI})
- 5) Donner alors z_1 sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 21

Soient les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1$; $b = i$ et $c = 1 + i$

A tout point M d'affixe $z \neq 1$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{iz}{z-1}$

- 1) Placer les points A, B et C puis montrer que $OACB$ est un carré

2) Mettre c sous la forme exponentielle et calculer c^{2024}

3) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n , c^n est-il un réel ?

4) Déterminer puis construire les ensembles suivants

$$E_1 = \{M(z) \in P \text{ tel que } |z'| = 1\} \quad E_2 = \{M(z) \in P \text{ tel que } z' \text{ soit un réel}\}$$

5) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$ on a : $z' - i = \frac{i}{z-1}$

b) En déduire que $BM' \times AM = 1$

c) Que décrit le point M' lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon 1

6) a) Déterminer l'ensemble $E_3 = \{M(z) \in P \text{ tel que } (z-1)(\bar{z}-1) = 4\}$

b) Montrer que si M appartient à E_3 alors M' appartient à un cercle (C) que l'on précisera

7) On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]0, \pi[$

Montrer $\forall \theta \in]0, \pi[$ on a $e^{i\theta} - 1 = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$ et en déduire le module et un argument de z' .

Exercice 22

Soit les points A, B et C d'affixes respectives $(\sqrt{3}-i)e^{i\frac{\pi}{3}}$; $-1+i\sqrt{3}$ et i

1) a) Ecrire $(\sqrt{3}-i)$ sous forme exponentielle, puis déduire la forme exponentielle de z_A

b) Ecrire sous forme exponentielle z_B puis $\frac{z_A}{z_B}$

c) Déduire que le triangle OAB est isocèle rectangle en O

d) Déterminer l'affixe du point D pour que $OADB$ soit un carré

2) Construire les points A, B et C .