Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

On considère les points A, B, C et I d'affixes respectives :

$z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que I est le milieu de $[AC]$.

2) On désigne par D le symétrique du point B par rapport au point I.

a) Déterminer l'affixe z_D du point D.

b) Montrer que $ABCD$ est un losange.

c) $ABCD$ est-il un carré ?

3) Déterminer les ensembles suivants : $E = \left\{M(z) \in P / \left|\frac{z-1-i}{z+2i}\right| = 1\right\}$ $F = \left\{M(z) \in P / \frac{z-1-i}{z+2i} \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

4) Déterminer et construire l'ensemble : $G = \left\{M(z) \in P / arg\left(\frac{2z+4i}{2-z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$

Exercice 2

Soient les points $A(-i)$; $B(i)$ et $C(-4i)$. A tout point M d'affixe $z \neq -i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz-4}{z+i}$

1) a) Montrer que si $M \neq A$ alors $OM' = \frac{CM}{AM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors le point M varie sur une droite que l'on déterminera.

2) a) Montrer que si $z \neq -i$ alors $(z' - i)(z + i) = -3$ et en déduire que $BM'.AM = 3$

b) Montrer alors que si le point M appartient au cercle C de centre A et de rayon 3 alors le point M' appartient à un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

3) a) Montrer que si $M \neq A$ alors $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \frac{\pi}{2} + (\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}})\ [2\pi]$

b) En déduire que si M appartient au segment $[AC] \setminus \{A, C\}$ alors M' appartient à une demi droite que l'on précisera

Exercice 3

Soit le système S : $\begin{cases} |z| = |z-6| \\ arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in Z \end{cases}$ où z est un nombre complexe

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes $a = \sqrt{3} + i$ et $b = 3 + 3i$

2) Parmi a et b lequel est solution du système S ? Justifier.

3) On désigne par M le point d'affixe z et A d'affixe 6. Traduire géométriquement le système S

4) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ le système S.

Exercice 4

Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta} - 1$ avec $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

1) On désigne par M et M' les points images respectifs de z et $\bar{z}$, déterminer l'affixe du point N pour que $OMNM'$ soit un losange.

2) a) Montrer que $z - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$

b) Mettre $\frac{z}{\bar{z}}$ sous forme exponentielle.

c) En déduire la valeur de θ pour que $OMNM'$ soit un carré.

Exercice 5

Soit le nombre complexe $z = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$, on pose $\theta \equiv arg(z)\ [2\pi]$

1) Sans déterminer θ, montrer que $\theta \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

2) a) Montrer que $z^2 = 2(\sqrt{2} - 1)(1 + i)$.

b) Ecrire $1 + i$ sous la forme trigonométrique.

c) En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 6

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectifs 1 et $a = \sqrt{3} + i$.

1) a) Donner la forme exponentielle de a.

b) Construire le point A.

2) Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{a-1}{1-\bar{a}}$

a) Vérifier que $b\bar{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle (C).

b) Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel.

En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c) Construire le point B.

3) Soit θ un argument du nombre complexe b. Montrer que : $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

Exercice 7

Soient les points $A(i)$ et $B(1)$ et soit l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{i\bar{z}-1}{\bar{z}-1}$ avec $z \neq 1$

1) a) Montrer que pour tout point $M \neq B$ on a : $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) Déduire l'ensemble des points $M'(z')$ lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

2) a) Montrer que $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{AM}\,,\overrightarrow{BM}}\right)\ [2\pi]$.

b) Déterminer les ensembles suivant : $E = \{M(z) \in P \ tel\ que\ z' \in \mathbb{R}_-^*\}$

$$F = \{M(z) \in P \text{ tel que } z' \in \mathbb{R}_+^* \}$$

3) a) Calculer $(z'-i)(\overline{z}-1)$

b) Déduire une construction du point M' image de M par f lorsque M décrit le cercle $C_{(B\,,\sqrt{2})}$.

Exercice 8

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{e^{-i2\theta}}{e^{-i\theta}-z}$ où θ est un réel et $z \neq e^{-i\theta}$

1) Montrer que l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $e^{i\theta}$ est $z_{A'} = \frac{1}{2\sin\theta} e^{i\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)}$ pour $\theta \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

2) a) Développer l'expression suivante : $\left[z - \frac{e^{-i\theta}(1-i\sqrt{3})}{2}\right]\left[z - \frac{e^{-i\theta}(1+i\sqrt{3})}{2}\right]$.

b) Déterminer les affixes des points invariants par f.

3) On désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_M = e^{-i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$ et $z_N = e^{-i\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}$.

a) Vérifier que $\overline{z_M} = z_N e^{2i\theta}$

b) Déterminer θ pour que M et N soient symétriques par rapport à $(O\,,\vec{v})$

4) a) Montrer que l'affixe du point J milieu du segment $[MN]$ est $z_J = \frac{1}{2} e^{-i\theta}$

b) Déterminer l'ensemble (C) des points J lorsque θ varie dans IR

5) a) Vérifier que le triangle OMN est isocèle en O

b) Montrer que l'aire A du triangle OMN est $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 9

Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

Soit f l'application de $P\backslash\{B\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-1}{z+1}$

1) a) Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.

b) Déterminer et construire l'ensemble Δ' des points M d'affixe z tel que z' soit un imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble D des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.

2) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq -1$ on a : $(z'-1)(z+1) = -2$.

b) En déduire que $AM' \times BM = 2$ et que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$.

3) Montrer que si le point M appartient au cercle (Γ) de centre B et de rayon 2, alors le point M' appartient à un cercle (Γ') que l'on déterminera.

4) A tout point $M(z)$ on associe le point N d'affixe $-\overline{z}$.

Montrer que si le point M est distinct de B alors le point M' appartient à la demi droite $[AN)$.

5) Soit K le point d'affixe $t = -2 + i\sqrt{3}$.

a) Ecrire $t + 1$ sous la forme exponentielle.

b) Montrer que le point K appartient au cercle (Γ).

6) **En utilisant les questions précédentes, donner une construction du point $K' = f(K)$ et construire K'**

Exercice 10

On considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectifs z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) **a) Montrer que : (Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si :**

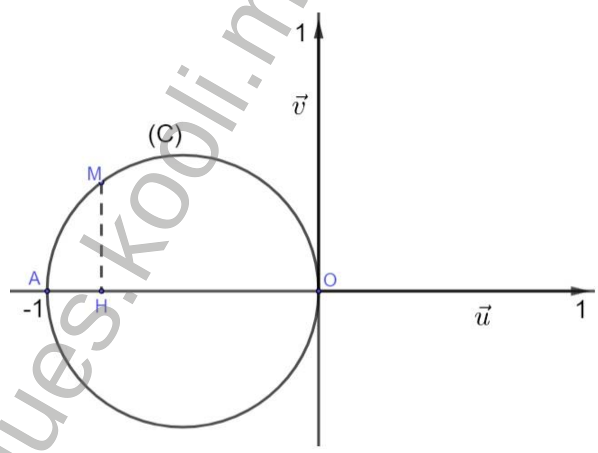
$$\left(\frac{1+z}{z} \text{ est imaginaire pur}\right)$$

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que :

$$\frac{1+z}{z} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) **Dans la figure ci-dessous on a tracé le cercle (Γ). et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O\,,\vec{u})$.**



On se propose de construire les points Net P.d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}\,,\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON}\,,\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

b) Montrer que : $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.