Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

On considère les points A, B, C et I d'affixes respectives :

$z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que I est le milieu de $[AC]$.

2) On désigne par D le symétrique du point B par rapport au point I.

a) Déterminer l'affixe z_D du point D.

b) Montrer que $ABCD$ est un losange.

c) $ABCD$ est-il un carré ?

3) Déterminer les ensembles suivants : $E = \left\{M(z) \in P / \left|\frac{z-1-i}{z+2i}\right| = 1\right\}$ $F = \left\{M(z) \in P / \frac{z-1-i}{z+2i} \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

4) Déterminer et construire l'ensemble : $G = \left\{M(z) \in P / arg\left(\frac{2z+4i}{2-z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$

Exercice 2

Soient les points $A(-i)$; $B(i)$ et $C(-4i)$. A tout point M d'affixe $z \neq -i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz-4}{z+i}$

1) a) Montrer que si $M \neq A$ alors $OM' = \dfrac{CM}{AM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors le point M varie sur une droite que l'on déterminera.

2) a) Montrer que si $z \neq -i$ alors $(z' - i)(z + i) = -3$ et en déduire que $BM'.AM = 3$

b) Montrer alors que si le point M appartient au cercle C de centre A et de rayon 3 alors le point M' appartient à un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

3) a) Montrer que si $M \neq A$ alors $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}\right)[2\pi]$

b) En déduire que si M appartient au segment $[AC] \backslash \{A, C\}$ alors M' appartient à une demi droite que l'on précisera

Exercice 3

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $2 - 3i$, i et $6 - i$. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z \neq i$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{i(z-2+3i)}{z-i}$

1) a) Calculer $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$

b) En déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en A

c) Déterminer l'affixe du point D' image par f du point D d'affixe $z_D = 1 - i$

d) Déterminer l'affixe z_E du point E antécédent par f du point d'affixe $2i$

e) Montrer que les points , B et E sont alignés

2) **a)** Montrer que $OM' = \frac{AM}{BM}$

b) Montrer alors que lorsque M' varie sur le cercle trigonométrique, le point M varie sur une droite que l'on déterminera

Exercice 4

Soit le système S : $\begin{cases} |z| = |z-6| \\ arg(z^2) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ ; k \in Z \end{cases}$ où z est un nombre complexe

1) Ecrire sous forme exponentielle chacun des nombres complexes $a = \sqrt{3} + i$ et $b = 3 + 3i$
2) Parmi a et b lequel est solution du système S ? Justifier.
3) On désigne par M le point d'affixe z et A d'affixe 6. Traduire géométriquement le système S
4) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ le système S.

Exercice 5

Soient les points A et B d'affixes respectives : $a = -\sqrt{3} - i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$.

1) **a)** Ecrire sous forme trigonométrique a et b.

b) Représenter les points A et B.

2) On pose $z = a + b$ et on désigne par M le point d'affixe z.

a) Montrer que $OAMB$ est un carré

b) Donner la forme trigonométrique de z

c) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 6

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{e^{-i2\theta}}{e^{-i\theta} - z}$ où θ est un réel et $z \neq e^{-i\theta}$

1) Montrer que l'affixe du point A' image par f du point A d'affixe $e^{i\theta}$ est $z_{A'} = \frac{1}{2\sin\theta} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)}$ pour $\theta \neq k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

2) **a)** Développer l'expression suivante : $\left[z - \frac{e^{-i\theta}(1 - i\sqrt{3})}{2}\right]\left[z - \frac{e^{-i\theta}(1 + i\sqrt{3})}{2}\right]$.

b) Déterminer les affixes des points invariants par f.

3) On désigne par M et N les points d'affixes respectives $z_M = e^{-i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$ et $z_N = e^{-i\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)}$.

a) Vérifier que $\overline{z_M} = z_N e^{2i\theta}$

b) Déterminer θ pour que M et N soient symétriques par rapport à $(O, \vec{v})$

4) **a)** Montrer que l'affixe du point J milieu du segment $[MN]$ est $z_J = \frac{1}{2} e^{-i\theta}$

b) Déterminer l'ensemble (C) des points J lorsque θ varie dans IR

5) **a)** Vérifier que le triangle OMN est isocèle en O

b) Montrer que l'aire A du triangle OMN est $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Exercice 7

A tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z' = \frac{iz+2}{z}$ avec $z \neq 0$.

1) a) En posant $z = x + iy$ avec $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2\backslash(0\,,0)$. Montrer que $z' = \frac{2x}{x^2+y^2} + i\left(1 - \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$.

b) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit un réel.

2) On suppose que $z = 2e^{i\theta}$ avec $\in \left]\frac{-\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

a) Montrer que $z' = 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)e^{\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}$.

b) Déterminer le module et un argument de z' en fonction de θ.

3) Application : on pose $= 1 + i\sqrt{3}$. Calculer $|z'|$ et en déduire $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Exercice 8

1) Déterminer l'écriture trigonométrique de : $1 + i$; $1 - i$ et $1 + i\sqrt{3}$.

2) On pose $Z = \frac{(1-i)^3}{(1+i)^2(1+i\sqrt{3})}$

a) Déterminer l'écriture trigonométrique de Z.

b) Déterminer l'écriture algébrique de Z.

3) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

4) Résoudre dans $[0\,,2\pi[$ l'équation $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x - \left(\sqrt{3}-1\right)\cos x = \sqrt{2}$.

Exercice 9

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectifs 1 et $a = \sqrt{3} + i$.

1) a) Donner la forme exponentielle de a.

b) Construire le point A.

2) Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{a-1}{1-\bar{a}}$

a) Vérifier que $b\bar{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle (C).

b) Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel.

En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c) Construire le point B.

3) Soit θ un argument du nombre complexe b. Montrer que : $\cos\theta = \frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$

Exercice 10

Soient les points A et B d'affixes respectifs $\mathrm{a} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $\mathrm{b} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$

1) a) Placer les points A et B.

b) Ecrire a et b sous la forme algébrique.

2) La droite Δ passant par B et parallèle à $(O, \vec{u})$ et la droite Δ' passant par A et parallèle à $(O, \vec{v})$ se coupent en un point C.

Déterminer c l'affixe du point C.

3) Soit le point D d'affixe $d = c^2$.

a) Calculer OD

b) Montrer que $c^2 = 1 + 2i\sqrt{6}$

c) En déduire une construction du point D.

Exercice 11

1) Soit z un nombre complexe non nul. Montrer que : $1 + z + z^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$ ou $= -\frac{1}{2}$.

2) Soit z un nombre complexe non nul de module $\sqrt{2}$ et d'argument θ, $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminer la forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants : $\frac{z}{\bar{z}}$, $\frac{z^2}{1+i}$ et $\left(\frac{\bar{z}}{\sqrt{3}+i}\right)^3$.

Exercice 12

Soit le nombre complexe $z = 1 + (\sqrt{2} - 1)i$, on pose $\theta \equiv arg(z)\ [2\pi]$

1) Sans déterminer θ, montrer que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2) **a)** Montrer que $z^2 = 2(\sqrt{2} - 1)(1 + i)$.

b) Ecrire $1 + i$ sous la forme trigonométrique.

c) En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 13

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

1) Le nombre complexe $\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$ a pour argument :

a) $\frac{\pi}{12}$ **b)** $\frac{\pi}{4}$ **c)** $\frac{\pi}{3}$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : -1 ; $1 + 2i$; 3 et $-3i$. Alors on a :

a) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.

b) le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

c) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3) Un argument du nombre complexe $(1 + i)^{2013}$ est : **a)** $\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$

Exercice 14

Soit les points A et M d'affixes respectifs $2i$ et z où z est un nombre complexe.

1) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z) \in P / |z| = |z - 2i|\}$

2) Soit $M(z)$ un point de E, on pose $\arg(z) \equiv \alpha[2\pi]$ avec $\alpha \in]0, \pi[$

a) Montrer que $\arg(z) + arg(z - 2i) \equiv 0[2\pi]$

b) Montrer que $|z| = \frac{1}{\sin\alpha}$ et que $z = \cot\alpha + i$

3) Soit les points B et C d'affixes respectifs i et $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Déterminer α pour que BCM soit un triangle équilatéral.

Exercice 15

Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

Soit f l'application de $P\backslash\{B\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-1}{z+1}$

1) **a)** Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.

b) Déterminer et construire l'ensemble Δ' des points M d'affixe z tel que z' soit un imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble D des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.

2) **a)** Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq -1$ on a : $(z'-1)(z+1) = -2$.

b) En déduire que $AM' \times BM = 2$ et que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$.

3) Montrer que si le point M appartient au cercle (Γ) de centre B et de rayon 2, alors le point M' appartient à un cercle (Γ') que l'on déterminera.

4) A tout point $M(z)$ on associe le point N d'affixe $-\bar{z}$.

Montrer que si le point M est distinct de B alors le point M' appartient à la demi droite $[AN)$.

5) Soit K le point d'affixe $t = -2 + i\sqrt{3}$.

a) Ecrire $t + 1$ sous la forme exponentielle.

b) Montrer que le point K appartient au cercle (Γ).

6) En utilisant les questions précédentes, donner une construction du point $K' = f(K)$ et construire K'

Exercice 16

1) Soit φ un réel de $[-\pi\,,\pi]$ et z le nombre complexe défini par : $z = \frac{1}{2}[\sin\varphi + i(1-\cos\varphi)]$

Déterminer en fonction de φ, le module et un argument de z.

2) Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle $]0\,,\pi[$. Déterminer le module et un argument de chacun des complexes $z - i$ et $\frac{z}{z-1}$ (z étant le nombre complexe donné en 1).

3) On considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z-1}$

Déterminer et représenter les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque $\varphi \in\,]0\,,\pi[$.

Exercice 17

Soit le nombre complexe $z = e^{i\theta} - 1$ avec $\theta \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

1) On désigne par M et M' les points images respectifs de z et $\bar{z}$, déterminer l'affixe du point N pour que $OMNM'$ soit un losange.

2) **a)** Montrer que $z - i = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$

b) Mettre $\frac{z}{\bar{z}}$ sous forme exponentielle.

c) En déduire la valeur de θ pour que $OMNM'$ soit un carré..

Exercice 18

Soient les points $A(i)$ et $B(1)$ et soit l'application f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \frac{i\bar{z}-1}{\bar{z}-1}$ avec $z \neq 1$

1) **a)** Montrer que pour tout point $M \neq B$ on a : $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) Déduire l'ensemble des points $M'(z')$ lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

2) **a)** Montrer que $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}}\right)\ [2\pi]$.

b) Déterminer les ensembles suivant : $E = \{M(z) \in P \ tel \ que \ z' \in \mathbb{R}_-^* \}$

$F = \{M(z) \in P \ tel \ que \ z' \in \mathbb{R}_+^* \}$

3) **a)** Calculer $(z' - i)(\bar{z} - 1)$

b) Déduire une construction du point M' image de M par f lorsque M décrit le cercle $C_{(B, \sqrt{2})}$.

Exercice 19

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$

1) **a)** Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

b) Déterminer l'affixe z_G du point G centre du triangle OAB.

c) Déterminer l'écriture exponentielle du complexe z_A.

2) Soit C le point du plan tel que : $OA = OC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

a) Montrer que $|z_C| = 2$ et $arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ où z_C est l'affixe du point C

b) En déduire que $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

3) **a)** Montrer que $OABC$ est un losange.

b) $OABC$est-il un carré ?

4) Déterminer et construire l'ensemble $E = \left\{M(z) \in P / arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\right\}$

Exercice 20

On considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectifs z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) **a)** Montrer que : (Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si :

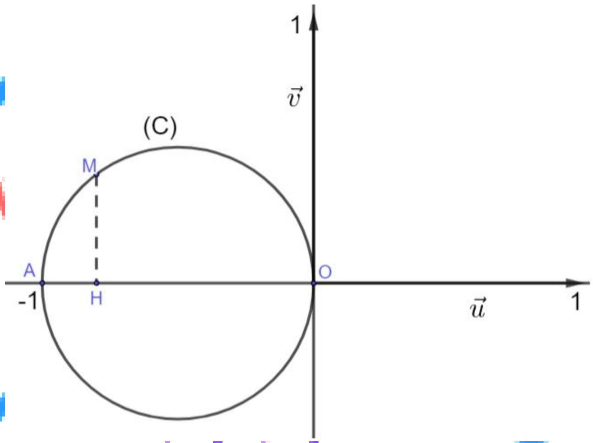
$$\left(\frac{1+z}{z} \text{ est imaginaire pur} \right)$$

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que :

$$\frac{1+z}{z}=\frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$$

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Dans la figure ci-dessous on a tracé le cercle (Γ). et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.



On se propose de construire les points Net P.d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que : $(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ $[2\pi]$ puis que $(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}) \equiv (\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}})$ $[2\pi]$

b) Montrer que : $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

Exercice 21

On désigne par A, B et C **les** points du plan P d'affixes respectives $2i$, -1 et i. On considère l'application f de $P/\{A\}$ vers P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'

tel que : $z' = \frac{z+1}{z-2i}$

1) **a)** On note par C' l'image de C par f. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?

b) Montrer que le point C admet un unique antécédent par l'application f que l'on notera C''.

Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

2) **a)** Déterminer l'ensemble E des point M tels que z' soit un imaginaire non nul.

b) Déterminer l'ensemble F des point M tels que M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 22

Soient les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 == -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Placer alors les points A, B et C d'affixes respectives 2, z_1 et z_2.

3) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point $I = A * B$.

4) Calculer OI et une mesure de $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OI}})$.

5) Donner alors z_I sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ *et* $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Exercice 23

Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$

1) Placer A et B.

2) Qu'elle est la nature du triangle OAB.

3) Soit le point C d'affixe $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(2 - 2i)$

a) Ecrire z_C sous forme algébrique et trigonométrique.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

4) **a)** Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}}\right)$.

b) En déduire la nature du triangle OAC.

5) Déterminer et construire l'ensemble Δ des $M(z)$ tel que : $|iz - 2 - 2i| = |z - 2 - 2i|$ (de deux manières)

6) Déterminer et construire l'ensemble Δ' des $M(z)$ tel que : $z = 2 + 2i\cos\theta$; $\theta \in [0\,,\pi]$