Dans tous les exercices le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$z_1 = (1+i)^2$ $z_2 = (1-i)^2$ $z_3 = (1+i)^3$ $z_4 = 2(1+i) - 3i(2-2i)$

$z_5 = (1-i)(2+3i)$ $z_6 = (2-i)(4+2i)$ $z_7 = (1-3i) + 2i(1-4i)$

Exercice 2

1) Soient les nombres complexes : $z_1 = 1-2i$ et $z_2 = -3+i$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$iz_1 - 2z_2$; $(z_1)^2$; $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$

2) Soit $z = 2 + iy$ où y est un réel.

a) Déterminer y pour que z^2 soit imaginaire pur.

b) Déterminer y pour que $(1+i)z$ soit un réel.

Exercice 3

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$\frac{8-i}{1-2i}$; $\frac{10}{3-i}$ et $\left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2$

2) Marquer les points A, B et C d'affixes respectives : $2+3i$, $3+i$ et $-1-i$

3) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en B.

b) Trouver l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle.

4) a) On pose $I = A * C$, trouver l'affixe du point I.

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E = \{M(z) \in P / |\bar{z} - 2 + 3i| = |z + 1 + i|\}$ et $F = \{M(z) \in P / |2\bar{z} - 1 + 2i| = 5\}$

Exercice 4

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Si $z = 2 - 2i(1+3i)$ alors :

a) $Re(z) = 2$ b) $\bar{z} = 2 + 2i(1+3i)$ c) $Im(z) = -2$

2) Si z est un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; alors un argument de $-2iz$ est :

a) $-\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ b) $0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$ c) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

3) Si $z = (\sqrt{3} - i) - 2i$ alors $|z|$ est égale à:

a) 0 *b)* $2\sqrt{3}$ *c)* $2 - 2\sqrt{3}$

Exercice 5

Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique

$z_1 = 1 + \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$

$z_2 = -1 + \cos\theta + i\sin\theta$ avec $\theta \in]0, \pi[$

$z_3 = \sin\theta + i\cos\theta +$ avec $\theta \in IR$

$z_4 = 1 - \cos\theta - i\sin\theta$ avec $\theta \in]-\pi, 0[$

Exercice 6

1) Déterminer l'écriture trigonométrique de : $1 + i$; $1 - i$ *et* $1 + i\sqrt{3}$.

2) On pose $Z = \frac{(1-i)^3}{(1+i)^2(1+i\sqrt{3})}$

a) Déterminer l'écriture trigonométrique de Z.

b) Déterminer l'écriture algébrique de Z.

3) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

4) Résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $(\sqrt{3} + 1)\sin x - (\sqrt{3} - 1)\cos x = \sqrt{2}$.

Exercice 7

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Soit z un nombre complexe, le conjugué de $1 + iz$ est :

a) $-1 - i\bar{z}$ *b)* $1 - i\bar{z}$ *c)* $1 - iz$

2) La forme algébrique de $(1 + i)^2(2 - 3i)$ est :

a) $6 - 4i$ *b)* $6 + 4i$ *c)* $-6 - 4i$

3) La forme algébrique de $\frac{8+i}{1+2i}$ est :

a) $-2 + 3i$ *b)* $2 + 3i$ *c)* $2 - 3i$

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

$z^2 + 2z + 5 = 0$ $z^2 - 4z + 20 = 0$ $4z^2 + 4z + 10 = 0$

Exercice 9

1) Soit $(z) = z^2 - (1 + i)z - (2 + i)$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z + 1)(z - 2 - i)$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$; $P(z) = 0$.

2) Soient les points $z_A = 2 + i$; $z_B = -1$ et $z_C = 3 - 2i$.

a) Placer les points A , B , et C.

b) Déterminer l'affixe du point J milieu du segment $[BC]$.

3) a) Calculer les distances AB, AC et BC.

b) Déduire la nature du triangle ABC.

4) a) Déterminer l'affixe du point D symétrique du point A par rapport à J.

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$? Justifier.

Exercice 10

Soient les points A et B d'affixes respectives : $a = -\sqrt{3} - i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$.

1) a) Ecrire sous forme trigonométrique a et b.

b) Représenter les points A et B.

2) On pose $z = a + b$ et on désigne par M le point d'affixe z.

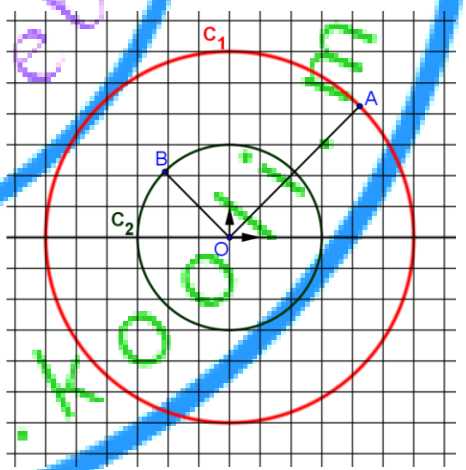
a) Montrer que $OAMB$ est un carré

b) Donner la forme trigonométrique de z

c) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 11

Dans la figure ci-contre on a construit un cercle C_1 de centre O et de rayon 6 et un cercle C_2 de centre O de rayon 3 ; le point $A \in C_1$ et le point $B \in C_2$.



1) Soient z_A et z_B les affixes respectives des point A et B.

a) Donner le module et un argument de z_A et z_B.

b) En déduire que $z_A = 3\sqrt{2}(1 + i)$

et que $z_B = \frac{3\sqrt{2}}{2}(-1 + i)$

2) a) Placer le point C d'affixe $z_C = 3i\sqrt{2}$

b) Montrer que $\frac{z_C - z_B}{z_A}$ est un réel.

c) Calculer $\frac{z_B}{z_A}$

3) En déduire que le quadrilatère $OACB$ est un trapèze rectangle.

Exercice 12

On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$z_A = -1 + 4i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = -i$

1) a) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

2) Soit le point E d'affixe $z_E = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner le module et un argument des complexes z_B et z_E.

b) Déduire le module et un argument de $z_B z_E$.

c) Ecrire sous forme algébrique le complexe : $z_B z_E$.

d) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z + i| = |z|$.

Exercice 13

Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$

1) Placer A et B.

2) Qu'elle est la nature du triangle OAB.

3) Soit le point C d'affixe $z_C = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(2 - 2i)$.

a) Ecrire z_C sous forme algébrique.

b) Ecrire $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2 - 2i$ sous forme trigonométrique.

4) a) Ecrire z_C sous forme trigonométrique.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

5) a) Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OC}}\right)$.

b) En déduire la nature du triangle OAC.

6) On pose $z = x + iy$ déterminer (de deux manières) et construire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que : $|-i\bar{z} - 2 + 2i| = |z - 2 + 2i|$

7) On pose $z = 2 + 2i\cos\theta$, $\theta \in [0\,,\pi]$. Qu'elle est l'ensemble des points M lorsque θ décrit $[0\,,\pi]$.

Exercice 14

On considère les points A, B, C et I d'affixes respectives :

$z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que I est le milieu de $[AC]$.

2) On désigne par D le symétrique du point B par rapport au point I.

a) Déterminer l'affixe z_D du point D.

b) Montrer que $ABCD$ est un losange.

c) $ABCD$ est-il un carré ?

3) Déterminer les ensembles suivants :

$E = \left\{M(z) \in P / \left|\frac{z-1-i}{z+2i}\right| = 1\right\}$; $F = \left\{M(z) \in P / \frac{z-1-i}{z+2i} \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

4) Déterminer et construire l'ensemble : $G = \left\{M(z) \in P / arg\left(\frac{2z+4i}{2-z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$

Exercice 15

1) Résoudre dans C l'équation $(z-1)^2 + 3 = 0$

2) On considère les points , B , C et D d'affixes respectives $z_A = -2$, $z_B = 1 + i\sqrt{3}$, $z_C = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_D = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

a) Ecrire z_B , z_C et z_D sous forme trigonométrique

b) Placer les points , B , C et D

c) Vérifier que les points , B , C et D sont sur un même cercle que l'on précisera

3) a) Donner l'écriture cartésienne des nombres complexes suivants $z_B{}^2$ et $z_D.z_B{}^2$

b) Donner le module et un argument de $z_D.z_B{}^2$

c) En déduire alors les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

4) Soit E le point d'affixe $(-i)$, à tout point M d'affixe z distinctde B on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+2}{iz+\sqrt{3}-i}$

a) Déterminer et construire l'ensemble F des points M tel que $|z'| = 1$

b) Montrer que $(z' + i)(z - z_B) = \sqrt{3} - 3i$

c) Déterminer alors l'ensemble G des points $M'(z')$ lorsque M décrit le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{3}$.