

Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Exercice 1

1) Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = -3 + i$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

$$iz_1 - 2z_2 ; (z_1)^2 ; z_1 \times z_2 \text{ et } \frac{z_1}{z_2}$$

2) Soit $z = 2 + iy$ où y est un réel.

a) Déterminer y pour que z^2 soit imaginaire pur.

b) Déterminer y pour que $(1 + i)z$ soit un réel.

Exercice 2

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \frac{3+i}{1+i}$ et $z_B = (-3 + 4i) \left(\frac{1-2i}{5}\right)$

1) Ecrire z_A et z_B sous la forme algébrique.

2) Placer les points A et B .

3) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle

4) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.

Exercice 3

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \frac{-7+i}{2-i}$ et $z_B = \frac{6}{-i+1}$

1) Ecrire z_A et z_B sous la forme algébrique.

2) Placer les points A et B .

3) Déterminer et construire les ensembles suivant

$$\Delta = \{M(z) \in P / |z + 3 + i| = |z - 3 - 3i|\} \text{ et } \mathcal{C} = \{M(z) \in P / |z + 3 + i| = 4\}$$

Exercice 4

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{8-i}{1-2i}$; $\frac{10}{3-i}$ et $\left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2$

2) Marquer les points A , B et C d'affixes respectives : $2 + 3i$, $3 + i$ et $-1 - i$

3) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en B .

b) Trouver l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle.

4) a) On pose $I = A * C$, trouver l'affixe du point I .

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \{M(z) \in P / |\bar{z} - 2 + 3i| = |z + 1 + i|\} \text{ et } F = \{M(z) \in P / |2\bar{z} - 1 + 2i| = 5\}$$

Exercice 5

1) Soit $(z) = z^2 - (1 + i)z - (2 + i)$, $z \in \mathbb{C}$.

a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$; $P(z) = (z + 1)(z - 2 - i)$.

b) Résoudre dans \mathbb{C} ; $P(z) = 0$.

2) Soient les points $z_A = 2 + i$; $z_B = -1$ et $z_C = 3 - 2i$.

a) Placer les points A , B , et C .

b) Déterminer l'affixe du point J milieu du segment $[BC]$.

3) a) Calculer les distances AB , AC et BC .

b) Déduire la nature du triangle ABC .

4) a) Déterminer l'affixe du point D symétrique du point A par rapport à J .

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ACDB$? Justifier.

Exercice 6

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes

$$z^2 + 2z + 5 = 0$$

$$z^2 - 4z + 20 = 0$$

$$4z^2 + 4z + 10 = 0$$

Exercice 7

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Soit z un nombre complexe, le conjugué de $1 + iz$ est :

a) $-1 - i\bar{z}$

b) $1 - i\bar{z}$

c) $1 - iz$

2) La forme algébrique de $(1 + i)^2(2 - 3i)$ est :

a) $6 - 4i$

b) $6 + 4i$

c) $-6 - 4i$

3) La forme algébrique de $\frac{8+i}{1+2i}$ est :

a) $-2 + 3i$

b) $2 + 3i$

c) $2 - 3i$

Exercice 8

Soient les points A , B , C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) a) placer les points A , B , C et I .

b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$.

2) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

3) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que $ABCD$ soit un losange.

4) a) A tout point M d'affixe $z \neq 4 + 2i$ on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{2z+4i}{z-4-2i}$

Montrer que : $OM' = \frac{2AM}{CM}$

b) Montrer que si le point M décrit la médiatrice du segment $[AC]$ alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice 9

On donne les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1 + 4i, z_B = 2 + 2i \text{ et } z_C = -i$$

1) a) Placer les points A, B et C .

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

2) Soit le point E d'affixe $z_E = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner le module et un argument des complexes z_B et z_E .

b) Déduire le module et un argument de $z_B z_E$.

c) Ecrire sous forme algébrique le complexe : $z_B z_E$.

d) En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z + i| = |z|$.

Exercice 10

Ecrire les nombres complexes suivants sous la forme trigonométrique

$$z_1 = 1 + \cos \theta + i \sin \theta \text{ avec } \theta \in]0, \pi[$$

$$z_2 = -1 + \cos \theta + i \sin \theta \text{ avec } \theta \in]0, \pi[$$

$$z_3 = \sin \theta + i \cos \theta + \text{ avec } \theta \in IR$$

$$z_4 = 1 - \cos \theta - i \sin \theta \text{ avec } \theta \in]-\pi, 0[$$

Exercice 11

1) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives : $i ; 1 - i ; 5 + i$ et $4 + 3i$

2) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

3) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1 - i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$

a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors M appartiendra à une droite que l'on précisera.

4) a) Montrer que $(z' - i)(z - 1 + i) = 2 + i$ et que $AM' \times BM = \sqrt{5}$

b) Montrer que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 12

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

1) a) Donner la forme trigonométrique de z_A, z_B et z_C .

b) Placer les points A, B et C .

c) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

2) a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ACBD$ soit un parallélogramme.

c) Montrer que $ACBD$ est un losange.

Exercice 13

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Si $z = 2 - 2i(1 + 3i)$ alors :

a) $Re(z) = 2$

b) $\bar{z} = 2 + 2i(1 + 3i)$

c) $Im(z) = -2$

2) Si z est un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$; alors un argument de $-2iz$ est :

a) $-\pi + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

b) $0 + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

c) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

3) Si $z = (\sqrt{3} - i) - 2i$ alors $|z|$ est égale à :

a) 0

b) $2\sqrt{3}$

c) $2 - 2\sqrt{3}$

Exercice 14

Répondre par Vrai ou Faux.

1) Soit $z = 2i - 3$ donc $\bar{z} = 3 - 2i$.

2) Soit $z = -1 - i$ donc $|z^8| = 16$

3) Soit z un nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{4}$ donc $z^{12} = -1$.

4) Soit z un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{6\pi}{4}$ donc z est imaginaire pur.

5) Soit z un nombre complexe dont un argument est $-\frac{\pi}{6}$ et ayant une partie réelle égale à $4\sqrt{3}$ donc $|z| = 8$.

6) Soit z un nombre complexe donc $|z + 1 - i| = |\bar{z} + 1 + i|$.

- 7) Soit z et z' deux nombres complexes si $|z| = |z'|$ donc $z = z'$.
- 8) Soit z et z' deux nombres complexes on a toujours $|z + z'| = |z| + |z'|$.

Exercice 15

On pose $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = 1 + i$

- 1) Ecrire sous la forme algébrique $u \times v$.
- 2) a) Ecrire u et v sous la forme trigonométrique.
b) Ecrire $u \times v$ sous la forme trigonométrique.
- 3) En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

Exercice 16

Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$

- 1) Placer A et B .
- 2) Qu'elle est la nature du triangle OAB .
- 3) Soit le point C d'affixe $z_C = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 - 2i)$.
a) Ecrire z_C sous forme algébrique.
b) Ecrire $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2 - 2i$ sous forme trigonométrique.
- 4) a) Ecrire z_C sous forme trigonométrique.
b) En déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$
- 5) a) Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\widehat{OA; OC})$.
b) En déduire la nature du triangle OAC .

Exercice 17

- 1) On donne $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i$.
a) Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.
b) En déduire la forme trigonométrique de $Z = \frac{z_1^2 \times z_2^2}{z_3^3}$
- 2) a) Ecrire Z sous forme algébrique.
b) En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$