Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

1) Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = -3 + i$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $iz_1 - 2z_2$; $(z_1)^2$; $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$

2) Soit $z = 2 + iy$ où y est un réel.

a) Déterminer y pour que z^2 soit imaginaire pur.

b) Déterminer y pour que $(1 + i)z$ soit un réel.

Exercice 2

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \frac{3+i}{1+i}$ et $z_B = (-3 + 4i)\left(\frac{1-2i}{5}\right)$

1) Ecrire z_A et z_B sous la forme algébrique.

2) Placer les points A et B.

3) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

4) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.

Exercice 3

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{8-i}{1-2i}$; $\frac{10}{3-i}$ et $\left(\frac{i-1}{2}\right)(1 + i)^2$

2) Marquer les points A, B et C d'affixes respectives : $2 + 3i$, $3 + i$ et $-1 - i$

3) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en B.

b) Trouver l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle.

4) a) On pose $I = A * C$, trouver l'affixe du point I.

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E = \{M(z) \in P / |z - 2 - 3i| = |z + 1 + i|\}$ **et** $F = \{M(z) \in P / |2\bar{z} - 1 + 2i| = 5\}$

Exercice 4

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Soit z un nombre complexe, le conjugué de $1 + iz$ est :

a) $1 - iz$ **b)** $1 - i\bar{z}$ **c)** $1 + i\bar{z}$

2) La forme algébrique de $(1 + i)^2(2 - 3i)$ est :

a) $6 - 4i$ **b)** $6 + 4i$ **c)** $-6 - 4i$

3) La forme algébrique de $\frac{8+i}{1+2i}$ est :

a) $-2 + 3i$ **b)** $2 + 3i$ **c)** $2 - 3i$

Exercice 5

1) Soient les points $z_A = 2 + i$; $z_B = -1$ et $z_C = 3 - 2i$.

a) Placer les points A , B , et C.

b) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$.

2) a) Calculer les distances AB, AC et BC.

b) Déduire la nature du triangle ABC.

3) a) Déterminer l'affixe du point D symétrique du point A par rapport à J.

b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Exercice 6

Soient les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

1) a) placer les points A, B, C et I.

b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$.

2) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

3) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que $ABCD$ soit un losange.

4) a) A tout point M d'affixe $z \neq 4 + 2i$ on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{2z+4i}{z-4-2i}$

Montrer que : $OM' = \frac{2AM}{CM}$

b) Montrer que si le point M décrit la médiatrice du segment $[AC]$ alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice 7

A tout M d'affixe $z \neq i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+1}{z-i}$ et soient les points : $A(-1)$ et $B(i)$.

1) a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$.

2) Déterminer et construire les ensembles suivants

a) $E = \{M(z) \in P / z' \in \mathbb{R}\}$

b) $E = \{M(z) \in P / z'$ soit imaginaire pur$\}$.

Exercice 8

Soient les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

1) a) Donner la forme trigonométrique de z_A, z_B et z_C.

b) Placer les points A, B et C.

c) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

2) a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$.

b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ACBD$ soit un parallélogramme.

c) Montrer que $ACBD$ est un losange.

Exercice 9

1) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives : i ; $1 - i$; $5 + i$ et $4 + 3i$

2) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

3) A tout point M du plan d'affixe z distinct de $1 - i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$

a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors M appartiendra à une droite que l'on précisera.

4) a) Montrer que $(z' - i)(z - 1 + i) = 2 + i$ et que $AM' \times BM = \sqrt{5}$

b) Montre que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 10

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + 4i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = -i$

1) Ecrire sous forme algébrique les complexes : $z_A z_B$ et $\frac{z_B}{z_A}$

2) a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

3) Soit le point E d'affixe $z_E = 1 + i\sqrt{3}$.

a) Donner le module et un argument de z_B et z_E.

b) Déduire le module et argument de $z_B z_E$.

c) Ecrire sous forme algébrique le complexe : $z_B z_E$.

d) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z + i| = |z|$.

Exercice 11

On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_B = -2 - 2i$

$z_C = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = 2 - 2i\sqrt{3}$

1) a) Placer les points A, B, C et D.

b) Calculer $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_D}$

c) En déduire le module et un argument de $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_D}$

d) Quelle est la nature du triangle ACD.

2) a) Déterminer le module et un argument de z_C et z_B.

b) Ecrire sous la forme algébrique $\frac{z_C}{z_B}$

c) Ecrire sous la forme trigonométrique de $\frac{z_C}{z_B}$

d) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + \sqrt{3})\cos 2x + (1 - \sqrt{3})\sin 2x = 2$.

4) A tout point $M \neq D$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z - z_C}{z - z_D}$

a) Vérifier que $(z'-1)(z-2+2i\sqrt{3})=4-4i\sqrt{3}$.

b) Déduire l'ensemble des point M' lorsque M décrit le cercle de centre D et de rayon 4.

Exercice 12

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Si $z=2-2i(1+3i)$ alors :

a) $Re(z)=2$ b) $\overline{z}=2+2i(1+3i)$ c) $Im(z)=-2$

2) Si z est un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

alors un argument de $(1-i)^2z$ est :

a) $-\pi+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$ b) $0+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$ c) $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\,;k\in\mathbb{Z}$

3) Si $z=(\sqrt{3}-i)-2i$ alors $|z|$ est égale à:

a) 0 b) $2\sqrt{3}$ c) $2-2\sqrt{3}$

Exercice 13

Répondre par Vrai ou Faux.

1) Soit $z=2i-3$ donc $\overline{z}=3-2i$.

2) Soit $z=-1-i$ donc $|z^8|=16$

3) Soit z un nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{4}$ donc $z^{12}=-1$.

4) Soit z un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{6\pi}{4}$ donc z est imaginaire pur.

5) Soit z un nombre complexe dont un argument est $-\frac{\pi}{6}$ et ayant une partie réelle égale à $4\sqrt{3}$

donc $|z|=8$.

6) Soit z un nombre complexe donc $|z+1-i|=|\overline{z}+1+i|$.

7) Soit z et z' deux nombres complexes si $|z|=|z'|$ donc $z=z'$.

8) Soit z et z' deux nombres complexes on a toujours $|z+z'|=|z|+|z'|$.

Exercice 14

On pose $u=1+i\sqrt{3}$ et $v=1+i$

1) Ecrire sous la forme algébrique $u\times v$.

2) a) Ecrire u et v sous la forme trigonométrique.

b) Ecrire $u\times v$ sous la forme trigonométrique.

3) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

Exercice 15

Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_A=2-2i$ et $z_B=2+2i$

1) Placer A et B.

2) Qu'elle est la nature du triangle OAB.

3) Soit le point C d'affixe $z_C=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2-2i)$.

a) Ecrire z_C sous forme algébrique.

b) Ecrire $\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2-2i$ sous forme trigonométrique.

4) a) Ecrire z_C sous forme trigonométrique.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

5) a) Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OC}})$.

b) En déduire la nature du triangle OAC.

Exercice 16

Soient les nombres complexes $z_1=-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2=-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Placer alors les points A, B et C d'affixes respectives 2, z_1 et z_2

3) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point $J=A*B$

4) Calculer OI et une mesure de $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$.

5) Donner alors z_J sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$

Exercice 17

Soient les points $z_A=-i$, $z_B=i$ et $z_C=4i$. A tout point M d'affixe $z\neq i$ on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{iz-4}{z+i}$

1) a) Montrer que si $M\neq A$ alors on a $OM'=\frac{CM}{AM}$

b) En déduire que si M' est sur le cercle de centre O et de rayon 1 alors le point M varie sur une droite que l'on déterminera.

2) a) Montrer que si $z\neq i$ alors $(z'-i)(z+i)=-3$ et en déduire que : $AM\times BM'=3$.

b) Montrer alors que si le point M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 2 alors le point M' appartient à un cercle $\mathcal{C}$' dont on précisera le centre et le rayon.

3) a) Montrer que si $M\neq A$ et $M\neq B$ alors $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})=\frac{\pi}{2}+(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CM'}})+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$.

b) En déduire que si M appartient au segment $[AB]\backslash\{A,B\}$ alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

Exercice 18

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i$.

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2) Ecrire $z_1\times z_2$ sous la forme trigonométrique et en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3) A tout point $M\in P\backslash\{B\}$ et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{z-z_1}{z-z_2}$

a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tel que z' soit imaginaire pur.

b) Déterminer et construire l'ensemble F des points M tel que z' soit réel.

c) Déterminer l'ensemble G des points M tel que $|z'| = 1$.

4) Soit I le point d'affixe 1. Montrer que pour tout point $\in P\setminus\{B\}$, $IM' \times BM = 1 + \sqrt{3}$.

Que décrit le point M' lorsque M décrit le cercle de centre B et de rayon 1 ?

Exercice 19

1) On donne $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i$.

a) Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique de $Z = \frac{{z_1}^2 \times {z_2}^2}{{z_3}^3}$

2) a) Ecrire Z sous forme algébrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

3) Résoudre dans $[0\,,2\pi[$; $\left(\sqrt{2} - \sqrt{6}\right)\cos x + \left(\sqrt{2} + \sqrt{6}\right)\sin x = 2$