

Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Exercice 1

1) Soient les nombres complexes : $z_1 = 1 - 2i$ et $z_2 = -3 + i$

Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $iz_1 - 2z_2$; $(z_1)^2$; $z_1 \times z_2$ et $\frac{z_1}{z_2}$

2) Soit $z = 2 + iy$ où y est un réel.

a) Déterminer y pour que z^2 soit imaginaire pur.

b) Déterminer y pour que $(1 + i)z$ soit un réel.

Exercice 2

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \frac{3+i}{1+i}$ et $z_B = (-3 + 4i) \left(\frac{1-2i}{5}\right)$

1) Ecrire z_A et z_B sous la forme algébrique.

2) Placer les points A et B .

3) Montrer que le triangle OAB est isocèle.

4) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.

Exercice 3

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{8-i}{1-2i}$; $\frac{10}{3-i}$ et $\left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2$

2) Marquer les points A, B et C d'affixes respectives : $2 + 3i$, $3 + i$ et $-1 - i$

3) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en B .

b) Trouver l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle.

4) a) On pose $I = A * C$, trouver l'affixe du point I .

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$$E = \{M(z) \in P / |z - 2 - 3i| = |z + 1 + i|\} \quad \text{et} \quad F = \{M(z) \in P / |2\bar{z} - 1 + 2i| = 5\}$$

Exercice 4

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Soit z un nombre complexe, le conjugué de $1 + iz$ est :

a) $1 - iz$

b) $1 - i\bar{z}$

c) $1 + i\bar{z}$

2) La forme algébrique de $(1 + i)^2(2 - 3i)$ est :

a) $6 - 4i$

b) $6 + 4i$

c) $-6 - 4i$

3) La forme algébrique de $\frac{8+i}{1+2i}$ est :

a) $-2 + 3i$

b) $2 + 3i$

c) $2 - 3i$

Exercice 5

1) Soient les points $z_A = 2 + i$; $z_B = -1$ et $z_C = 3 - 2i$.

a) Placer les points A, B , et C .

b) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$.

- 2) a) Calculer les distances AB , AC et BC .
 b) Déduire la nature du triangle ABC .
- 3) a) Déterminer l'affixe du point D symétrique du point A par rapport à J .
 b) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Exercice 6

Soient les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

- 1) a) placer les points A, B, C et I .
 b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$.
- 2) Montrer que le triangle ABC est isocèle.
- 3) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que $ABCD$ soit un losange.
- 4) a) A tout point M d'affixe $z \neq 4 + 2i$ on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{2z+4i}{z-4-2i}$

Montrer que : $OM' = \frac{2AM}{CM}$

b) Montrer que si le point M décrit la médiatrice du segment $[AC]$ alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice 7

A tout M d'affixe $z \neq i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+1}{z-i}$ et soient les points : $A(-1)$ et $B(i)$.

- 1) a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$
 b) En déduire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que $|z'| = 1$.
- 2) Déterminer et construire les ensembles suivants
 a) $E = \{M(z) \in P / z' \in \mathbb{R}\}$
 b) $E = \{M(z) \in P / z' \text{ soit imaginaire pur}\}$.

Exercice 8

- 1) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives : i ; $1 - i$; $5 + i$ et $4 + 3i$
 2) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

3) A tout point M du plan d'affixe z distinct de $1 - i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$

- a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$
 b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors M appartiendra à une droite que l'on précisera.
- 4) a) Montrer que $(z' - i)(z - 1 + i) = 2 + i$ et que $AM' \times BM = \sqrt{5}$
 b) Montre que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 9

Soient les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = -i$, $z_B = \sqrt{3} + i$ et $z_C = -\sqrt{3} + i$.

- 1) a) Donner la forme trigonométrique de z_A , z_B et z_C .
b) Placer les points A , B et C .
c) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.
- 2) a) Déterminer l'affixe du point I milieu du segment $[BC]$.
b) Déterminer l'affixe du point D tel que $ACBD$ soit un parallélogramme.
c) Montrer que $ACBD$ est un losange.

Exercice 10

On donne les points A , B et C d'affixes respectives : $z_A = -1 + 4i$, $z_B = 2 + 2i$ et $z_C = -i$

- 1) Ecrire sous forme algébrique les complexes : $z_A z_B$ et $\frac{z_B}{z_A}$
- 2) a) Placer les points A , B et C .
b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.
c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.
- 3) Soit le point E d'affixe $z_E = 1 + i\sqrt{3}$.
a) Donner le module et un argument de z_B et z_E .
b) Déduire le module et argument de $z_B z_E$.
c) Ecrire sous forme algébrique le complexe : $z_B z_E$.
d) En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$
- 4) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z + i| = |z|$.

Exercice 11

On donne les points A , B , C et D d'affixes respectives : $z_A = 2\sqrt{3} + 2i$, $z_B = -2 - 2i$

$z_C = -2 + 2i\sqrt{3}$ et $z_D = 2 - 2i\sqrt{3}$

- 1) a) Placer les points A , B , C et D .
b) Calculer $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_D}$
c) En déduire le module et un argument de $\frac{z_A - z_C}{z_A - z_D}$
d) Quelle est la nature du triangle ACD .
- 2) a) Déterminer le module et un argument de z_C et z_B .
b) Ecrire sous la forme algébrique $\frac{z_C}{z_B}$
c) Ecrire sous la forme trigonométrique de $\frac{z_C}{z_B}$
d) En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

3) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $(1 + \sqrt{3}) \cos 2x + (1 - \sqrt{3}) \sin 2x = 2$.

4) A tout point $M \neq D$ d'affixe z on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z - z_C}{z - z_D}$

a) Vérifier que $(z' - 1)(z - 2 + 2i\sqrt{3}) = 4 - 4i\sqrt{3}$.

b) Déduire l'ensemble des point M' lorsque M décrit le cercle de centre D et de rayon 4.

Exercice 12

Une seule des réponses proposées est exacte.

1) Si $z = 2 - 2i(1 + 3i)$ alors :

a) $Re(z) = 2$

b) $\bar{z} = 2 + 2i(1 + 3i)$

c) $Im(z) = -2$

2) Si z est un nombre complexe dont un argument est $\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

alors un argument de $(1 - i)^2 z$ est :

a) $-\pi + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

b) $0 + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

c) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$

3) Si $z = (\sqrt{3} - i) - 2i$ alors $|z|$ est égale à :

a) 0

b) $2\sqrt{3}$

c) $2 - 2\sqrt{3}$

Exercice 13

Répondre par Vrai ou Faux.

1) Soit $z = 2i - 3$ donc $\bar{z} = 3 - 2i$.

2) Soit $z = -1 - i$ donc $|z^8| = 16$

3) Soit z un nombre complexe de module 1 et dont un argument est $\frac{\pi}{4}$ donc $z^{12} = -1$.

4) Soit z un nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et dont un argument est $\frac{6\pi}{4}$ donc z est imaginaire pur.

5) Soit z un nombre complexe dont un argument est $-\frac{\pi}{6}$ et ayant une partie réelle égale à $4\sqrt{3}$ donc $|z| = 8$.

6) Soit z un nombre complexe donc $|z + 1 - i| = |\bar{z} + 1 + i|$.

7) Soit z et z' deux nombres complexes si $|z| = |z'|$ donc $z = z'$.

8) Soit z et z' deux nombres complexes on a toujours $|z + z'| = |z| + |z'|$.

Exercice 14

On pose $u = 1 + i\sqrt{3}$ et $v = 1 + i$

1) Ecrire sous la forme algébrique $u \times v$.

2) a) Ecrire u et v sous la forme trigonométrique.

b) Ecrire $u \times v$ sous la forme trigonométrique.

3) En déduire $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$

Exercice 15

Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$

1) Placer A et B .

2) Qu'elle est la nature du triangle OAB .

3) Soit le point C d'affixe $z_C = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2 - 2i)$.

a) Ecrire z_C sous forme algébrique.

b) Ecrire $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2 - 2i$ sous forme trigonométrique.

4) a) Ecrire z_C sous forme trigonométrique.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

5) a) Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC})$.

b) En déduire la nature du triangle OAC .

Exercice 16

Soient les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Placer alors les points A, B et C d'affixes respectives $2, z_1$ et z_2

3) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point $J = A * B$

4) Calculer OI et une mesure de $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.

5) Donner alors z_J sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$.

Exercice 17

Soient les points $z_A = -i, z_B = i$ et $z_C = 4i$. A tout point M d'affixe $z \neq i$ on associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{iz-4}{z+i}$$

1) a) Montrer que si $M \neq A$ alors on a $OM' = \frac{CM}{AM}$

b) En déduire que si M' est sur le cercle de centre O et de rayon 1 alors le point M varie sur une droite que l'on déterminera.

2) a) Montrer que si $z \neq i$ alors $(z' - i)(z + i) = -3$ et en déduire que : $AM \times BM' = 3$.

b) Montrer alors que si le point M appartient au cercle \mathcal{C} de centre A et de rayon 2 alors le point M' appartient à un cercle \mathcal{C}' dont on précisera le centre et le rayon.

3) a) Montrer que si $M \neq A$ et $M \neq B$ alors $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM'}) + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$.

b) En déduire que si M appartient au segment $[AB] \setminus \{A, B\}$ alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

Exercice 18

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_2 = 1 - i$.

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme trigonométrique.

2) Ecrire $z_1 \times z_2$ sous la forme trigonométrique et en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

3) A tout point $M \in P \setminus \{B\}$ et d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-z_1}{z-z_2}$

a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tel que z' soit imaginaire pur.

- b)** Déterminer et construire l'ensemble F des points M tel que z' soit réel.
- c)** Déterminer l'ensemble G des points M tel que $|z'| = 1$.
- 4)** Soit I le point d'affixe 1. Montrer que pour tout point $\in P \setminus \{B\}$, $IM' \times BM = 1 + \sqrt{3}$.
Que décrit le point M' lorsque M décrit le cercle de centre B et de rayon 1 ?

Exercice 19

- 1)** On donne $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ et $z_3 = 1 - i$.
- a)** Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.
- b)** En déduire la forme trigonométrique de $Z = \frac{z_1^2 \times z_2^2}{z_3^3}$
- 2) a)** Ecrire Z sous forme algébrique.
- b)** En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$
- 3)** Résoudre dans $[0, 2\pi[$; $(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \cos x + (\sqrt{2} + \sqrt{6}) \sin x = 2$