Nombre dérivé 3ème Mathématiques

Exercice 1

En utilisant la définition du nombre dérivé calculer pour chacune des fonctions ci-dessous le nombre dérivé de a indiqué :

$f(x) = x^2 - 2x - 2 \quad a = 1$; $f(x) = \frac{2x-1}{x+2} \quad a = -1$; $f(x) = \sqrt{x-3} \quad a = 4$

$f(x) = (2x-1)^2 \quad a = -1$; $f(x) = \frac{x^2-3x-3}{x-2} \quad a = 3$; $f(x) = \sqrt{3x+1} - 2 \quad a = 1$

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \sqrt{2x+1}$

1) Etudier la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$

2) a) Donner en utilisant la définition du nombre dérivé le nombre dérivé en $a \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

b) En déduire le nombre dérivé de 0

c) Donner alors une estimation de $\sqrt{1{,}002}$

2) Soit T la tangent à la courbe de f au point d'abscisse 0, donner une équation cartésienne de T.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $[-3, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x+3}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) Déterminer le nombre dérivé de f en 1.

2) Donner une approximation affine de $f(1{,}001)$

3) Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 1, déterminer une équation de T.

Exercice 4

Déterminer dans chaque cas $f'(a)$ tout en donnant une condition sur a s'il y a lieu.

$f(x) = 3x^2 - 4x + 15 \qquad f(x) = \dfrac{2x+3}{4x-1} \qquad f(x) = (-x^2+3x-2)(2x^2+x-1)$

$f(x) = \dfrac{2(x^2-1)}{x^2+1} \qquad f(x) = (x^3-x^2+2)^3 \qquad f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2} \qquad f(x) = \sqrt{2x-2}$

$f(x) = \dfrac{3}{2x-4} \qquad f(x) = \dfrac{1}{-2x^2+x+1} \qquad f(x) = -4\sqrt{-3x+6} \qquad f(x) = \dfrac{(x^2-x+1)^2}{x^2+4}$

Exercice 5

Soit la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x+1} & si \quad x \geq 1 \\ f(x) = x^3 + x & si \quad x < 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 1.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

b) Déterminer une équation cartésienne de la demi-tangente T à C_f à gauche en 1.

3) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Donner une équation cartésienne de la demi-tangente T' à C_f à droite en 1.

4) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice 6

Calculer les limites suivantes en utilisant le nombre dérivé d'une fonction que l'on déterminera.

a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$ b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{-x+2}-2}{x+2}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{-2x+6}-2}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{-3}{x^2+3}+1}{x}$ e) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\frac{x+3}{x+1}+1}{x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Exercice 7

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+2$ et $g(x)=-x^2+12x-30$ et soient C_f et C_g leurs courbes représentatives.

1) Montrer que courbes C_f et C_g admettent un seul point d'intersection que l'on notera A.

2) Montrer que les courbes C_f et C_g admettent au point A la même tangente T dont on donnera une équation.

3) Etudier la position de T par rapport à C_f et à C_g.

Exercice 8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=x^2+1 & si\ x\le 1 \\ f(x)=\sqrt{x}+1 & si\ x>1 \end{cases}$

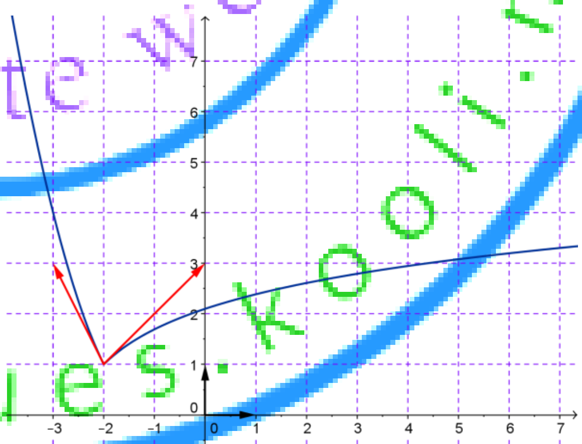
1) a) Montrer que f est dérivable à gauche en 1 et déterminer $f'_g(1)$.

b) f est-elle dérivable en 1 ? Justifier.

2) Trouver une approximation affine de chacun des réels : $f(0{,}99)$et $f(1{,}01)$.

Exercice 9

On donne ci-contre la courbe d'une fonction f.



1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Déterminer $f(-2)$

b) $\lim\limits_{x\to-2^-}\frac{f(x)-1}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to-2^+}\frac{f(x)-1}{x+2}$

c) Déterminer le domaine de dérivabilité de f.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

Exercice 10

I) On donne ci-dessous la courbe d'une fonction g définie sur $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$ par :

$$g(x)=2-x^2\sqrt{x^2-1}$$

1) Calculer $g(-\sqrt{2})$ et $g(\sqrt{2})$.

2) a) Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

b) Déterminer graphiquement $\lim\limits_{x \to -1^-} \frac{g(x)-2}{x+1}$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{g(x)-2}{x-1}$

c) Déterminer graphiquement le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

II) Soit f la fonction définie sur $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2\sqrt{x^2-1}}{x} - x + 1$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 1. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

c) Montrer que les droites D_1; $y = -x + 3$ et D_2; $y = -x - 1$ sont des asymptote à C_f respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que le point $I(0, 1)$ est un centre de symétrie de C_f.

4) Construire D_1, D_2 et C_f