Exercice 1

Calculer les limites suivantes $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{3x^2-4x-4}$ $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{2x^2-x-1}$ $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x}$ $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2}$ $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{-3x+1}}$ $\lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{-x+2}-2}{x+2}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2) Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to 5} f(x)$

3) a) Montrer que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$

b) Calculer $\lim_{x\to 4} f(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & si\ \ x > 3 \\ \frac{x^2-x-2}{-x+4} & si\ \ x \leq 3 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,, 3[$ et $]3\,, +\infty[$

2) Etudier la continuité de f en 3

3) En déduire le domaine de continuité de f.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{-2x+6}-2}{x-1} & si\ \ x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2-x-1}{2x+1} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,, 1[$ et $]1\,, +\infty[$

2) Etudier la continuité de f en 1

3) En déduire le domaine de continuité de f

Exercice 5

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_g de g.

b) Montrer que g est continue sur $[-4\,, +\infty[$

c) Calculer alors $\lim_{x\to 0} g(x)$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que $\forall\ x \in D_f$ on a : $f(x) = g(x)$

c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f en 0.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & si\ \ x \in [-4\,,+\infty[\backslash\{0\} \\ \frac{1}{4} & si\ \ x = 0 \\ \frac{x^2+5x+4}{x+4} + a & si\ x \in\ ]-\infty\,,-4[\end{cases}$

a) Etudier la continuité de h en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -4^-} h(x) = a - 3$

c) Pour quelle valeur de a ; h est-elle continue en -4 ?

4) On prend $= 1$. Déterminer le domaine de continuité de h

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{-x+4}-2}{2x} & si\ x \neq 0 \\ -\frac{1}{8} & si\ x = 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty\,,4]$

b) Montrer que $f(4)$ est un minimum de f sur $]-\infty\,,4]$

c) Montrer que f est bornée sur $]-\infty\,,4]$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x + 2$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}\,,3\right]$

b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in\ ]-\infty\,,0[\\ \frac{-x^3+3x^2-x-1}{x-1} & si\ \ x \in [0\,,+\infty[\ \backslash\{1\} \\ a & si\ \ \ x \end{cases}$

a) Etudier la continuité de g en 0. La fonction g est-elle continue en 0 ?

b) Déterminer a pour que g soit continue en 1

c) On prend $= 2$. Déterminer le domaine de continuité de g. (expliquer)

Exercice 7

1) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x[x-1]}$

a) Déterminer le domaine de définition de f

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

a) La fonction f est elle prolongeable par continuité en 1

2) Soit g la fonction définie sur $[-3\,,+\infty[$ par $\begin{cases} g(x) = f(x) & si\ \ x > 1 \\ g(x) = \frac{x-1}{-2+\sqrt{x+3}} & si\ -3 \leq x < 1 \\ g(1) = 4 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue en 1

b) Etudier la continuité de g sur son domaine de définition

3) On a représenté ci-dessous la courbe C_f de la restriction de f à l'intervalle $[1\,,+\infty[$ et les points $A(0\,,2)$ et $B(3\,,2)$

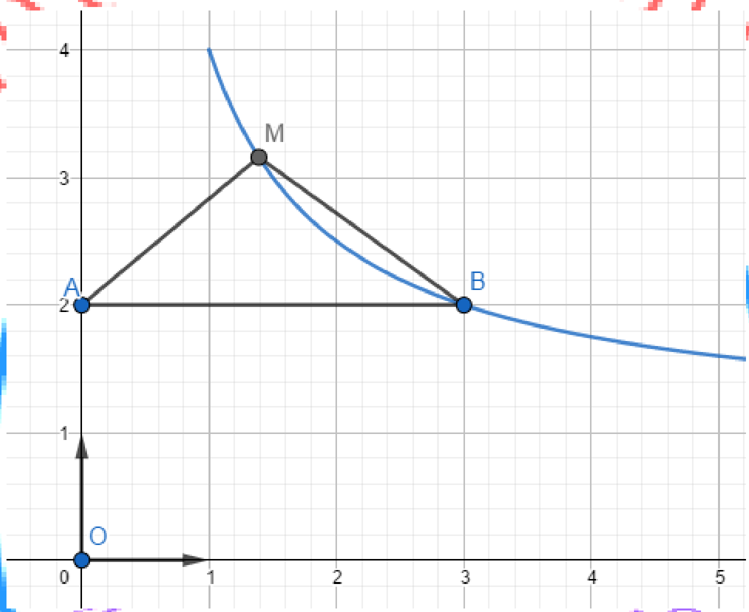
Soit h l'application qui à tout réel $x \geq 1$,

associe l'aire du triangle MAB où M est le point de C_f d'abscisse x

a) Par lecture graphique déterminer le sens de variation de h

b) Justifier que $\forall x \geq 1$ on a $h(x) = \frac{3}{2}[f(x) - 2]$

c) En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, montrer qu'il existe au moins un point M de C_f d'abscisse $x_0 \in [1\,,2]$ tel que l'aire du triangle MAB soit égale à 1



Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}+2}$

1) Justifier que f est continue sur $[0\,,+\infty[$.

2) **a)** Vérifier que pour tout $x \in [0\,,+\infty[$ on a : $f(x) = 1 - \frac{4}{\sqrt{x}+2}$

b) Montrer que f est majorée par 1.

c) Montrer que f est strictement croissante sur $[0\,,+\infty[$.

d) En déduire que f est bornée sur $[0\,,+\infty[$.

3) **a)** Montrer que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]0\,,1[$.

b) Vérifier que $\sqrt{\alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{1+\alpha}$

4) Soit la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \frac{f(x)}{x-4} & si\ \ x \in [\alpha\,,+\infty[\backslash\{4\} \\ g(x) = \frac{-2(1-x)\sqrt{x}}{(1+x)(x-4)} & si\ \ x \in [0\,,\alpha[\end{cases}$

b) Montrer que g est prolongeable par continuité en 4

c) Montrer que g est continue en α.