Exercice 1

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{3x^2-4x-4} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{2x^2-x-1} \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{x} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x+5}-3}{x-2} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{2-\sqrt{-3x+1}} \qquad \lim_{x\to -2} \frac{\sqrt{-x+2}-2}{x+2}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

1) **Déterminer le domaine de définition D_f de f.**

2) **Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$**

3) **a) Montrer que $\forall x \in D_f$ on a $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$**

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-3}{\sqrt{x+1}-2} & si\ \ x > 3 \\ \frac{x^2-x-2}{-x+4} & si\ \ x \leq 3 \end{cases}$

1) **Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,, 3[$ et $]3\,, +\infty[$**

2) **Etudier la continuité de f en 3**

3) **En déduire le domaine de continuité de f.**

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{-2x+6}-2}{x-1} & si\ \ x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2-x-1}{2x+1} & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$

1) **Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,, 1[$ et $]1\,, +\infty[$**

2) **Etudier la continuité de f en 1**

3) **En déduire le domaine de continuité de f**

Exercice 5

Soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}$

1) **a) Déterminer le domaine de définition D_g de g.**

   b) Montrer que g est continue sur $[-4\,, +\infty[$

c) Calculer alors $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Montrer que $\forall\, x \in D_f$ on a : $f(x) = g(x)$

c) En déduire que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction prolongée F de f en 0.

3) Soit h la fonction définie par : $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & si\ x \in [-4, +\infty[\setminus\{0\} \\ \dfrac{1}{4} & si\ x = 0 \\ \dfrac{x^2+5x+4}{x+4} + a & si\ x \in]-\infty, -4[\end{cases}$

a) Etudier la continuité de h en 0.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to -4^-} h(x) = a - 3$

c) Pour quelle valeur de a ; h est-elle continue en -4 ?

4) On prend $= 1$. Déterminer le domaine de continuité de h

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{-x+4}-2}{2x} & si\ x \neq 0 \\ -\dfrac{1}{8} & si\ x = 0 \end{cases}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f.

b) Etudier la continuité de f en 0.

2) a) Montrer que f est continue sur $]-\infty, 4]$

b) Montrer que $f(4)$ est un minimum de f sur $]-\infty, 4]$

c) Montrer que f est bornée sur $]-\infty, 4]$

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = -x + 2$ admet au moins une solution α dans l'intervalle $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$

b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \in]-\infty, 0[\\ \dfrac{-x^3 + 3x^2 - x - 1}{x-1} & si\ x \in [0, +\infty[\ \setminus\{1\} \\ a & si\ \ x \end{cases}$$

a) Etudier la continuité de g en 0. La fonction g est-elle continue en 0 ?

b) Déterminer a pour que g soit continue en 1

c) On prend $= 2$. Déterminer le domaine de continuité de g. (expliquer).

Exercice 7

Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = -\sqrt{-x-1} & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \frac{3x-1}{x+1} & \text{si } -1 < x \leq 1 \ ; \ m \in \mathbb{R} \\ f(x) = \sqrt{x^2+3} + mx & \text{si } x > 1 \end{cases}$

et soit C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer l'ensemble de définition de .

b) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

c) Etudier la continuité de f en (-1).

2) Déterminer le réel m pour que f soit continue en 1.

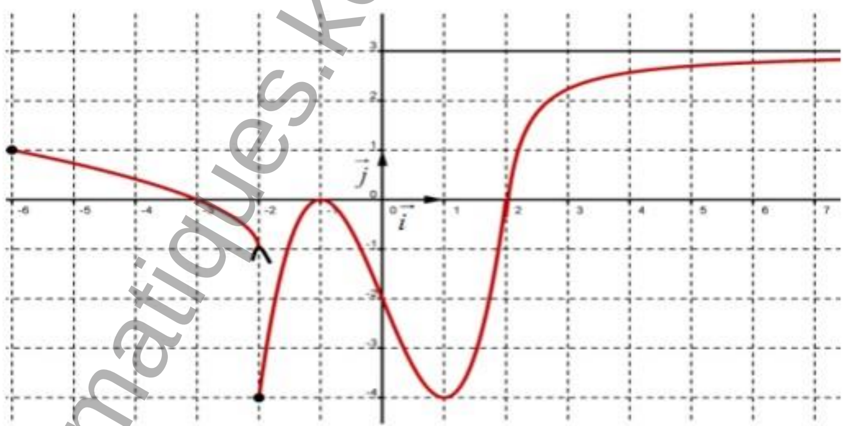
3) Déterminer suivant les valeurs de m l'ensemble de continuité de f.

4) On prend $m = -2$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Exercice 8

On a représenté ci-dessous la courbe C_f d'une fonction f définie sur $[-6, +\infty[$



1) a) Déterminer le domaine de continuité D_c de la fonction f.

b) Montrer que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution sur $[-1, 1]$.

c) Déterminer le nombre de solution de l'équation $f(x) = -1$ pour tout $x \in [-6, +\infty[$.

2) Répondre par Vrai ou Faux aux propositions suivantes.

a) Le réel 3 est le maximum de f sur $[-6, +\infty[$.

b) La fonction f admet un minimum sur $[-6, +\infty[$ en -2.

c) La restriction de f à $[-6, 2]$ admet un maximum en -6.

3) Déterminer $f([-6, +\infty[)$

4) a) Résoudre dans $[-6, +\infty[$ l'inéquation $f(x) > 0$.

b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction g définie par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$

c) Montrer que pour tout $x \in]-6,-3[\ ;\ \dfrac{g(x)-1}{f(x)-1} = \dfrac{-g(x)}{\sqrt{f(x)}+1}$

d) En déduire $\lim\limits_{x \to 6^+} \left[\dfrac{g(x)-1}{f(x)-1}\right]$

Exercice 9

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{\sqrt{x}-1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de f.

2) Montrer que f est continue sur D_f.

3) a) Montrer que $f(x) = 5$ admet au moins une solution $\alpha \in]0\,,1[$

b) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c) Montrer que : $\sqrt{\alpha} = \frac{2}{5}\left(\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha + 1\right)$

d) Montrer que 3 est le minimum de f sur D_f.

4) On considère la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) & si\ \ x > 1 \\ \frac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & si\ \ x < 1 \end{cases}$

a) Déterminer le domaine de définition de g.

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$

d) g est elle prolongeable par continuité en 1? Justifier.